



Transformada Ondita. Teoría y Aplicaciones (Clase 2)

Dra. María Eugenia Torres

Universidad Nacional de Entre Ríos
Facultad de Ingeniería
Laboratorio de Señales y
Dinámicas no Lineales

metorres@ceride.gov.ar

Contenidos

- **Introducción**
Elementos de Matemáticas avanzadas. Operadores lineales. Proyecciones. Espacios vectoriales. Filtros lineales invariantes en el tiempo. Integrales de Fourier en L^1 y en L^2 . Propiedades. Filtros lineales discretos invariantes en el tiempo.
- **Análisis tiempo-frecuencia**
La transformada Fourier por ventanas. La transformada ondita. Frecuencia instantánea. Energía tiempo-frecuencia instantánea.
- **Marcos**
Teoría de Marcos. Marcos en Fourier y en onditas. Invariancia ante traslación. Transformada Ondita Diádica.
- **Bases Ondita.**
Bases onditas ortogonales. Aproximaciones Multirresolución. Funciones escala. Filtros espejo conjugados. Clases de bases ondita. Onditas y bancos de filtros. Bases biortogonales.
- **Aplicaciones.**

Elementos de Matemática Avanzada



¿Siempre existe la Integral de Riemann?

$$\int_{-2}^1 1/x \, dx$$

$$\int_{-a}^b 1/x^2 \, dx, \text{ para } a > 0, b > 0$$

El valor principal de la Integral de Riemann

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 1/x \, dx &\cong \lim_{d \rightarrow 0} \left(\int_{-2}^{-d} 1/x \, dx + \int_d^1 1/x \, dx \right) \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \left(\log(|x|) \Big|_{x=-2}^{x=-d} + \log(|x|) \Big|_{x=d}^{x=1} \right) \\ &= \log 2 - \log 1\end{aligned}$$

$$(VP) \int_{-2}^1 1/x \, dx = \log 2$$

Limitaciones de la integral de Riemann

- Sólo esta definida en intervalos acotados
- Su extensión a intervalos infinitos se realiza como una integral impropia.

Problema:

No satisface la invariancia por traslaciones

- No conmuta con límites uniformes.

¿Invariancia por traslaciones?

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \right), (\text{para } a > 0) \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} ((-1) \cdot a + 1 \cdot a) = 0 \end{aligned}$$

¿Si realizamos una traslación en 1 hacia la derecha?

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-1) dx &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^1 f(x-1) dx + \int_1^a f(x-1) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} [(-1) \cdot (1+a) + 1 \cdot (a-1)] \quad , \text{ para cualquier } a > 1 \\ &= -2 !!!! \end{aligned}$$

¿Si realizamos una traslación en 1 hacia la derecha?

Otra alternativa para resolver la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-1)dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-a}^b f(x-1)dx, \text{ para } a, b > 0$$

$= \boxed{+\infty}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-1)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x-1)dx, \text{ para } a, b > 0$$

$= \boxed{-\infty}$

¿ Cuánto vale entonces esta integral?

No conmuta con límites uniformes

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{para otro } x \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \text{ (uniformemente)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^n \frac{1}{n} dx + \int_n^{\infty} 0 dx = 1, \quad \forall n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx \right) = 1$$

De Riemann a Lebesgue

Integral de Riemann

(1853)

f función continua en (a,b)

$$\int_a^b f(x) dx$$

f función con discontinuidades
infinita en $c \in (a,b)$



Otras Integrales

Stieljes

E. Borel

H. Lebesgue

F. Riesz, etc

Integral de Lebesgue

(1907)

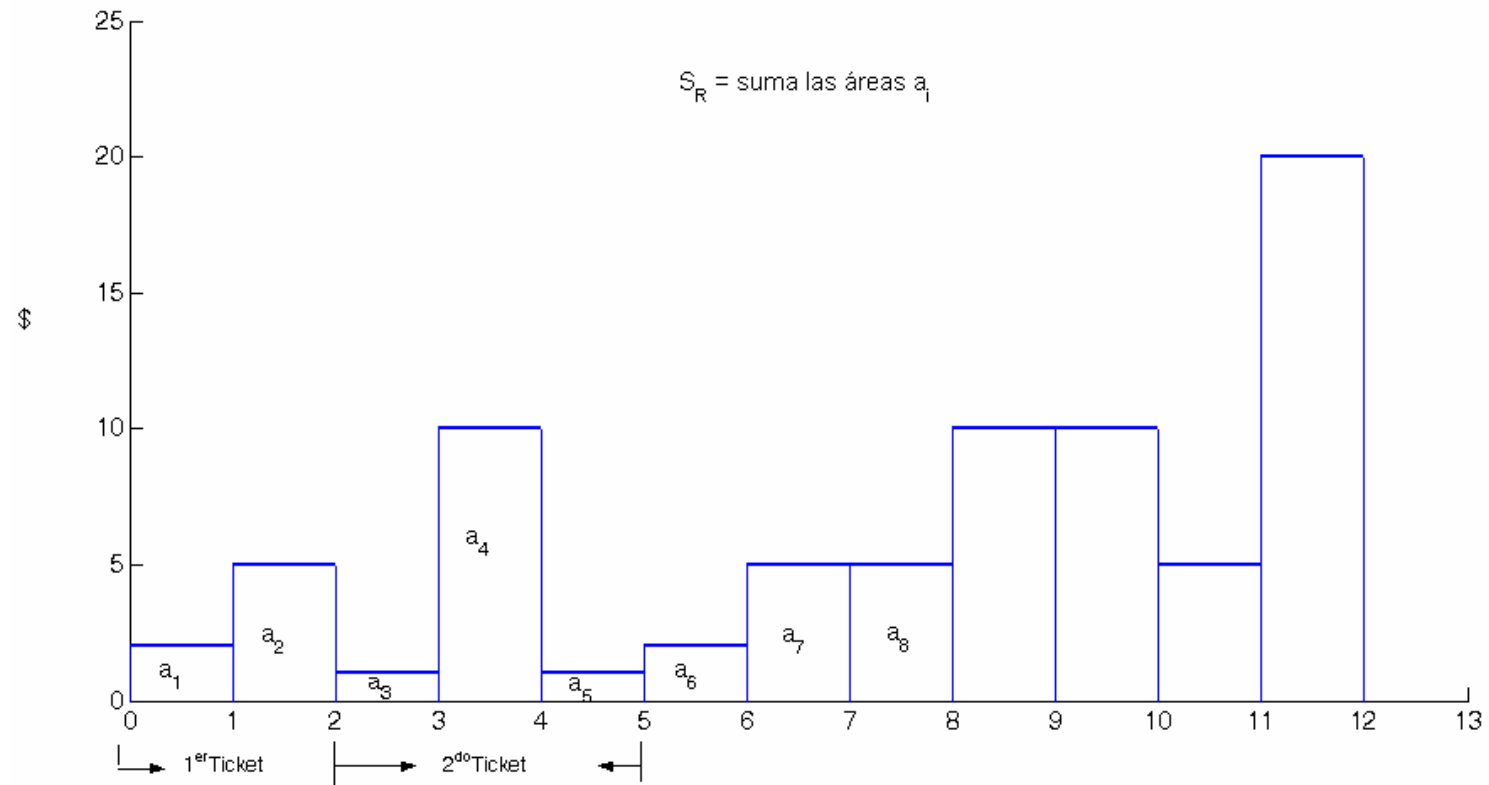
$$\int_{(a,b)} f(x) d\mu(x)$$



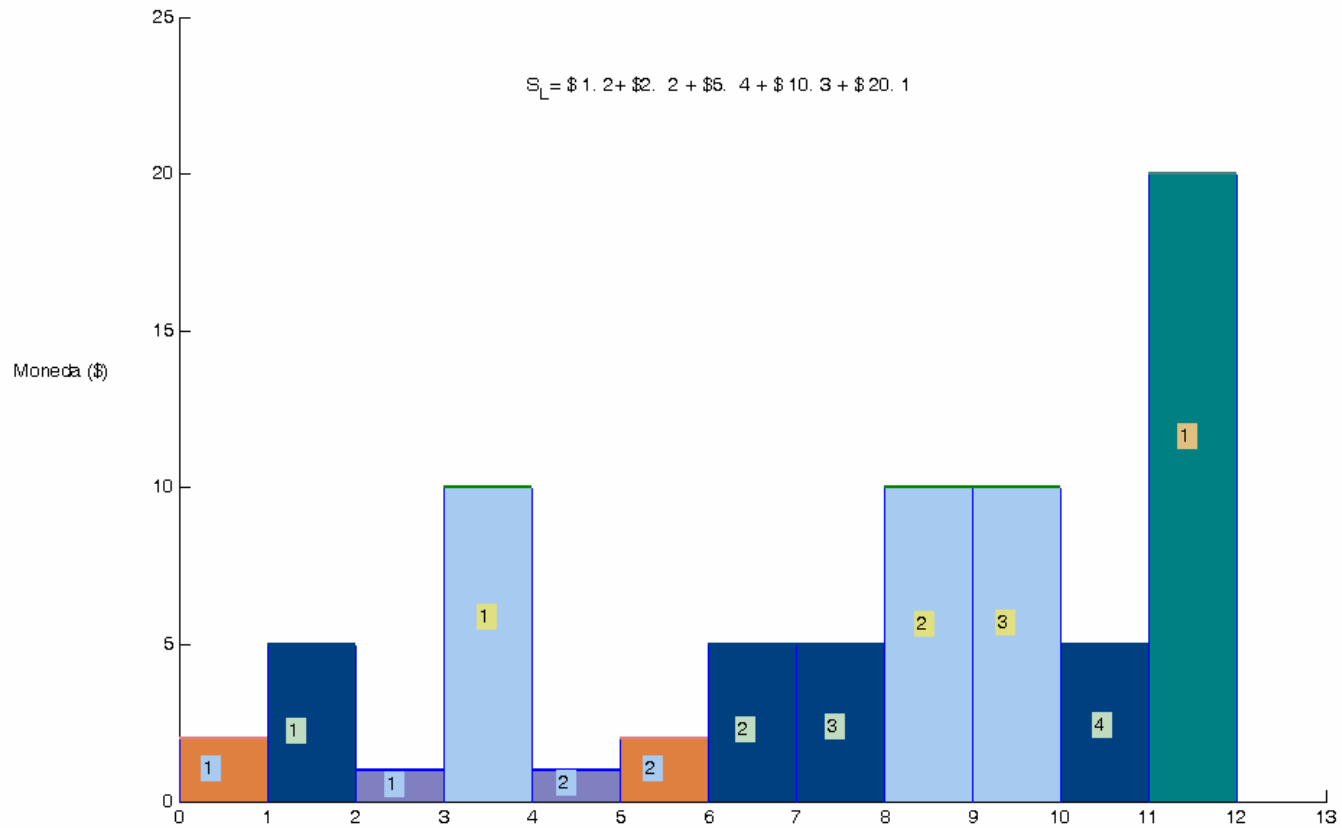
Teoría de la Medida (Borel)

Teoría de Integración
(Lebesgue)

Integrales de Riemann



Enfoque Lebesgue



Definición de Lebesgue

Contexto abstracto:

- Σ es una σ -álgebra de subconjuntos de X
- μ es una medida no negativa en X .
- f es medible en X

- Funciones características

$$\int_X \chi_S(x) d\mu(x) = \mu(S), \text{ para } S \in \Sigma$$

- Funciones simples
- Funciones no negativas.
- Funciones con signo

Integral de Lebesgue-Propiedades I

- Linealidad
- Monotonía
 - Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue
 - Lema de Fatou
 - Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

Integral de Lebesgue-Propiedades II

- Teorema de Fubini (permutación de las integrales dobles)
- Invariancia por traslaciones

Norma

$(V, +, *)$ un espacio vectorial sobre F de \mathbb{C} .

Se denomina **seminorma** en V a

$$\rho: V \rightarrow \mathbb{R} /$$

$$i) \quad \rho(v) \geq 0 \quad \forall v \in V$$

$$ii) \quad \rho(av) = |a|\rho(v) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall v \in V$$

$$iii) \quad \rho(u+v) \leq \rho(u) + \rho(v)$$

Una **norma** es una seminorma con la condición adicional que:

$$\rho(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Espacio normado

$(V, +, *, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado sobre F de \mathbb{C} .

En toda seminorma:

$$\rho(u \pm v) \geq |\rho(u) - \rho(v)|$$

Espacios de Banach

EB son espacios vectoriales normados **completos**

i.e. toda **sucesión de Cauchy** es convergente en el espacio.

$\{x_n\}$ / Dado $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ /

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m > N_\varepsilon.$$

Sistemas Lineales y Filtros

- Filtros lineales invariantes en el tiempo
- Integrales de Fourier en L^1 y en L^2 .
 - Propiedades.
- Discretización
- Filtros lineales discretos invariantes en el tiempo.
- Señales finitas.

Informe de Fourier al *Institute de France* (1807)

f periódica puede representarse por serie de ondas senoidales armónicas.

Impacto: física, ingeniería, análisis matemático.

Motivación de Fourier: difusión del calor

Transformada de Fourier diagonaliza todo operador lineal invariante en el tiempo



Bloques fundamentales del procesamiento de señales

Filtrado Lineal Invariante en el tiempo.

Operaciones básicas del procesamiento de señales

- transmisión de señales
- remoción de ruido estacionario
- codificación predictiva

son implementadas con operadores lineales invariantes en el tiempo

Filtrado Lineal Invariante en el tiempo.

Operador lineal invariante en el tiempo



$$f_{\tau}(t) = f(t - \tau)$$

$$g(t) = L[f(t)] \Rightarrow g(t - \tau) = L[f_{\tau}]$$

*Por estabilidad numérica L debe tener una forma de **continuidad débil**.*

Esta “continuidad débil” se formaliza mediante la “teoría de distribuciones”.

Delta de Dirac

- δ tiene soporte en $\{t = 0\}$ y
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$
- Si f continua:
$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \delta_0(u) du$$
- Se define para g continua tal que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = 1$$

$$g_s(t) = \frac{1}{s} g\left(\frac{t}{s}\right)$$

$$\delta = \lim_{s \rightarrow 0} g_s$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} g_s(t) f(t) dt = f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt$$

Convergencia débil

**Es
Notación!!!**

Sistema Lineal Invariante en el tiempo (SLIT).

Se caracterizan por su respuesta al impulso unitario.

f continua

$$\delta_u(t) = \delta(t - u)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \delta_u(t) du$$

L lineal y continua



$$L[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) L[\delta_t(u)] du$$

h respuesta al impulso

$$L[f(t)] = h * f(t)$$



donde $h(t) = L[\delta(t)]$

Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (SLIT).

Autovalores y autovectores

Las exponenciales complejas $e^{i\omega t}$

son **autovectores** del operador de convolución

$$L[e^{i\omega t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{i\omega(t-u)} du$$

$$L[e^{i\omega t}] = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{-i\omega u} du = \hat{h}(\omega) \cdot e^{i\omega t}$$

donde $\hat{h}(\omega) = \int_{\mathfrak{R}} h(u) e^{-i\omega u} du$ (Transformada de Fourier)

es el **autovalor** asociado en la frecuencia ω

Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (SLIT).

Autovalores y autovectores

Como las ondas sinusoidales $e^{i\omega t}$

son **autovectores** de los SLIT

es tentador tratar de descomponer cualquier función f
como “suma” de estos autovectores.

Podemos expresar $L[f]$ directamente a partir de los
autovalores $\hat{h}(\omega)$.

*El análisis de Fourier demuestra que bajo condiciones débiles
(seccional continuidad) es posible escribir $L[f]$*

como una Integral de Fourier.

Integrales de Fourier en L^1 y en L^2

$$f \in L^1(\mathfrak{R}) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty \quad \text{Potencia finita}$$

$$f \in L^2(\mathfrak{R}) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty \quad \text{Energía finita}$$

La Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$

$$f \in L^1(\mathbb{R})$$

La Transformada de Fourier (FT) $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

mide "cuantas" oscilaciones de f hay en la frecuencia ω .

Si $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$: $|\hat{f}(\omega)| \leq \int |f(t)| dt < +\infty$

$$\hat{f}(\omega) \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{y es continua}$$

(Papoullis, 1987)

La Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$

Teorema (Transformada Inversa de Fourier)

Si $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ y $\hat{f}(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

La reconstrucción no está garantizada para funciones discontinuas

Teorema (de Convolución)

Sea $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ y $h(t) \in L^1(\mathbb{R})$

$$g(t) = f * h(t) \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \hat{h}(\omega)$$

La Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$

La respuesta de un SLIT puede calcularse por su FT

$$L[f] = g = f * h \quad y \quad \hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{h}(\omega) \Rightarrow$$

$$L[f] = g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \hat{h}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$L[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(\omega) \boxed{\hat{f}(\omega) e^{i\omega t}} d\omega$$

$\hat{h}(\omega)$ atenúa o amplifica cada componente frecuencial $e^{i\omega t}$ de amplitud $\hat{f}(\omega)$

Esta convolución se denomina **Filtrado Frecuencial** y $\hat{h}(\omega)$ es la **Función de Transferencia del Filtro**

La Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$

$$f(t) = \chi_{[-1,1]}(t)$$

Función Característica de $[-1,1]$
o “Indicator Function”

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt = \frac{2 \sin \omega}{\omega} \notin L^1(\mathbb{R})$$

$$\hat{f}(\omega) \begin{cases} \notin L^1(\mathbb{R}) \\ \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

No puede aplicarse el Teorema de Inversión !

Es necesario extender la Transformada de Fourier a $L^2(\mathbb{R})$

■ Producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} dt, \text{ para } f, g \in L^2(\mathfrak{R})$$

■ Norma

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{f(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt, \text{ para } f \in L^2(\mathfrak{R})$$

La Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$

Teorema:

Si f y $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$\begin{aligned}\langle f, h \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{h}(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \bar{\hat{h}}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{h} \rangle\end{aligned}$$

$$\langle f, h \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{h} \rangle$$

Fórmula de Parseval

$$\text{Si } f = g, \quad \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2$$

Fórmula de Plancherel

La Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$

Extensión a L^2 \Rightarrow por densidad

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ pero $f \notin L^1(\mathbb{R})$

no puede calcularse su Transformada de Fourier
mediante la integral usual

porque

$$f(t) e^{i\omega t} \notin L^1(\mathbb{R})$$

Entonces se la define como un límite usando la **densidad** de

$$L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \text{ en } L^2(\mathbb{R})$$

La Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$

$L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$

$\exists \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, tal que f_n converge a f en $L^2(\mathbb{R})$

$$\|f_n - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Como $\{f_n\}$ es convergente, es una sucesión de Cauchy

\Downarrow

$$\|f_n - f_p\| < \varepsilon \quad \forall n, p > N_\varepsilon$$

$$f_n \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists \hat{f}_n \quad \text{y} \quad \|f_n - f_p\|_1 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}_n - \hat{f}_p\|_1$$

Entonces $\{\hat{f}_n\}$ es de Cauchy en $L^1 \cap L^2 \subset L^2$

L^2 es un espacio de Hilbert completo \Rightarrow toda sucesión de Cauchy converge en él

$$\exists \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f} - \hat{f}_n\|_2 = 0$$

se la **define** como la Transformada de Fourier de f

La Transformada de Fourier

Ejemplos

& Función Característica

$$f(t) = \chi_{[-T, T]}(t) \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-T}^T e^{-i\omega t} dt = 2 \frac{\sin(T\omega)}{\omega}$$

& Filtro Pasa-Bajo Ideal

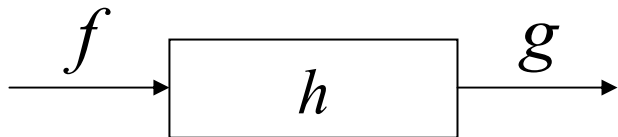
$$\hat{h}(\omega) = \chi_{[-\xi, \xi]}(\omega) \quad h(t) = \frac{1}{2} \int_{-\xi}^{\xi} e^{i\omega t} d\omega = \frac{\sin(\xi t)}{\pi t}$$

La Transformada de Fourier

Ejemplos

& Circuito Electrónico Pasivo

Implementa filtros analógicos: resistencias, capacitores e inductores.



$$\sum_{k=0}^K a_k f^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^M b_k g^{(k)}(t)$$

$$f(t) = g(t) = 0 \text{ si } t < 0$$

Aplicando Fourier:

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{\hat{f}(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^K a_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^M b_k (i\omega)^k}$$

La Transformada de Fourier

Ejemplos

& Función Gaussiana

$$f(t) = \exp(-t^2) \quad \text{es } C^\infty$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-T}^T e^{-t^2} e^{-i\omega t} dt$$

$$2\hat{f}'(\omega) + \omega \hat{f}(\omega) = 0$$

& Chirp Gaussiano

$$f(t) = \exp(-(a - ib)t^2)$$

$$\hat{f}(\omega) = \left[\frac{\pi}{a - ib} \right]^{1/2} \exp\left(\frac{-(a + ib)\omega^2}{4(a^2 + b^2)} \right)$$

La Transformada de Fourier

Propiedades: Regularidad y decaimiento

■ Regularidad y Decaimiento

La *regularidad global* de una señal f depende del decaimiento de $|\hat{f}(\omega)|$ cuando ω aumenta

$$\text{Si } \hat{f}(\omega) \in L^1(\mathfrak{R}) \Rightarrow |f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{R}} |\hat{f}(\omega)| d\omega < +\infty$$

i.e f es continua y acotada

La Transformada de Fourier

Propiedades: Regularidad y decaimiento

Teorema:

$$\text{Si } \int_{\mathfrak{R}} |\hat{f}(\omega)| (1 + |\omega|^p) d\omega < +\infty$$

entonces la función f es acotada y p veces continuamente diferenciable con derivadas acotadas.

La Transformada de Fourier

Propiedades: Regularidad y decaimiento

☞ Si $\exists n$ constantes K y $\varepsilon > 0$ / $|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{K}{1+|\omega|^{p+1+\varepsilon}}$

Entonces $f \in C^p$

☞ Si \hat{f} tiene soporte compacto, el teorema implica que $f \in C^\infty$

El decaimiento de $|\hat{f}(\omega)|$ depende del peor comportamiento singular de f .

La Transformada de Fourier

Propiedades: Regularidad y decaimiento

Ejemplo: $f(t) = \chi_{[-T, T]}(t)$

es discontinua en $-T$ y T .



$|\hat{f}(\omega)|$ decae como $\frac{1}{|\omega|}$

¿ Es f regular para $t \neq \pm T$?

Esta información no puede obtenerse a partir de la Transformada de Fourier.

Para caracterizar regularidades locales se necesitan formas de onda bien localizadas en el tiempo → → Onditas

La Transformada de Fourier

Propiedades: Principio de Incertidumbre

¿ Es posible construir una función f tal que:

→ Su energía esté bien localizada en tiempo?

→ Su transformada de Fourier tenga energía concentrada en un pequeño entorno de frecuencia?

La Transformada de Fourier

Propiedades: Principio de Incertidumbre

- $\delta(t - u)$ tiene soporte restringido a $t=u$
- $\hat{\delta}(\omega) = e^{-in\omega}$ tiene energía distribuida uniformemente en todas las frecuencias
- $|\hat{f}(\omega)|$ tiene decaimiento rápido a altas frecuencias, *sólo si f tiene variaciones regulares en el tiempo.*
- La energía debe estar desparramada en un tiempo “largo”.

La Transformada de Fourier

Propiedades: Principio de Incertidumbre

Solución?

- ¿ Reducir la dispersión temporal de f ?

Cómo?

- ¿ Con un cambio de escala de f ?

Si $f_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right)$, con $s < 1$, entonces $\|f_s\|^2 = \|f\|^2$

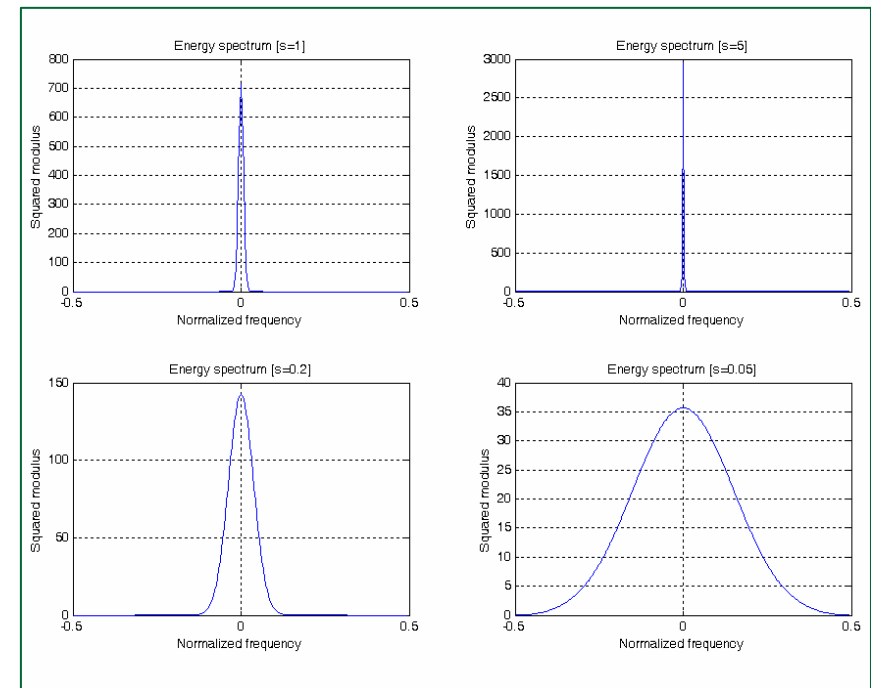
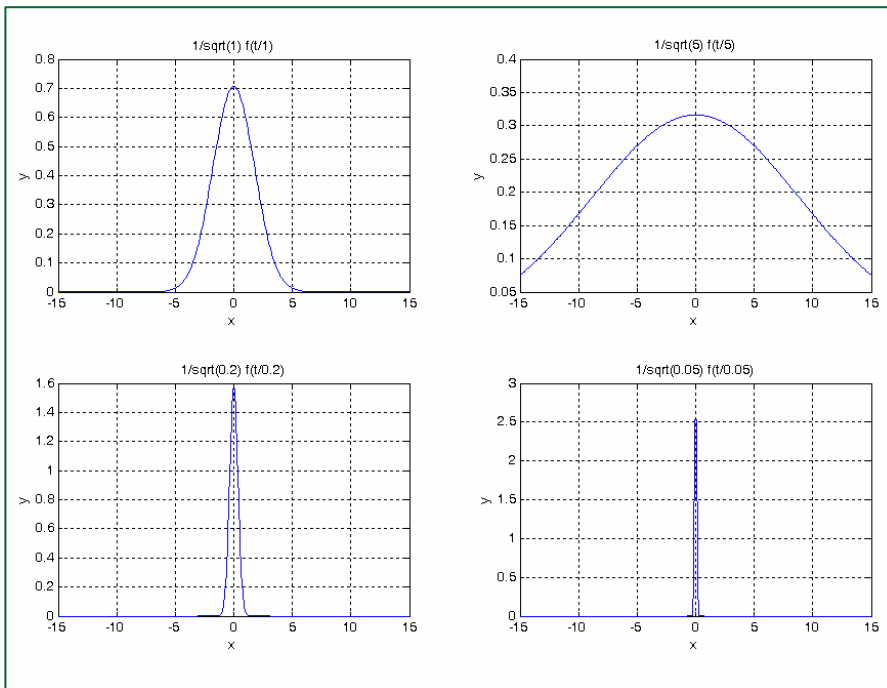
- pero $\hat{f}_s(\omega) = \sqrt{s} \hat{f}(s\omega)$ es dilatada en $1/s$

Dilatación en tiempo vs. frecuencia

$s = 1, 5, 0.2, 0.05$

$$f_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} f\left(\frac{t}{s}\right)$$

$$\hat{f}_s(\omega)$$



La Transformada de Fourier

Propiedades: Principio de Incertidumbre

- ❖ *Las concentraciones de energía en tiempo y frecuencia están restringidas por el Principio de Incertidumbre de Heisenberg*

Interpretación en Mecánica Cuántica:

El estado de una partícula unidimensional es descrito por una función de onda $f \in L^2(\mathbb{R})$

La Transformada de Fourier

Propiedades: Principio de Incertidumbre

$$f \in L^2(\mathbb{R})$$

➤ La densidad de probabilidad de que una partícula esté localizada en t es

$$\frac{1}{\|f\|^2} |f(t)|^2$$

➤ La densidad de probabilidad de que su momentum sea igual a ω es

$$\frac{1}{2\pi\|f\|^2} |\hat{f}(\omega)|^2$$

➤ Localización promedio:

$$u = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} t |f(t)|^2 dt$$

➤ Varianzas:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} (t-u)^2 |f(t)|^2 dt$$

➤ Momentum promedio:

$$\xi = \frac{1}{2\pi\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}} (\omega-\xi)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

La Transformada de Fourier

Propiedades: Principio de Incertidumbre

Teorema (de Incertidumbre de Heisenberg):

La varianza temporal y frecuencial de $f \in L^2(\mathbb{R})$ satisfacen

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4}$$

La igualdad es válida si y sólo si existen $(u, \xi, a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$ tales que

$$f(t) = a \exp[i\xi t - b(t - u)^2]$$

Gabor Chirps

La Transformada de Fourier

Propiedades: Principio de Incertidumbre

Soporte compacto?

Teorema

Si $f \neq 0$, tiene soporte compacto, entonces $\hat{f}(\omega)$ no puede ser nula en todo un intervalo.

Recíprocamente, si $\hat{f}(\omega)$ tiene soporte compacto, entonces $f(t)$ no puede ser nula en todo un intervalo.