



Transformada Ondita. Teoría y Aplicaciones

(Clase 6)

Dra. María Eugenia Torres

Universidad Nacional de Entre Ríos
Facultad de Ingeniería
Laboratorio de Señales y
Dinámicas no Lineales

metorres@ceride.gov.ar

Contenidos

- **Introducción**
Elementos de Matemáticas avanzadas. Operadores lineales. Proyecciones. Espacios vectoriales. Filtros lineales invariantes en el tiempo. Integrales de Fourier en L^1 y en L^2 . Propiedades. Filtros lineales discretos invariantes en el tiempo. Señales finitas.
- **Análisis tiempo-frecuencia**
La transformada Fourier por ventanas. La transformada ondita. Frecuencia instantánea. Energía tiempo-frecuencia instantánea.
- **Marcos**
Teoría de Marcos. Marcos en Fourier y en onditas. Invariancia ante traslación. Transformada Ondita Diádica.
- **Bases Ondita.**
Bases onditas ortogonales. Aproximaciones Multirresolución. Funciones escala. Filtros espejo conjugados. Clases de bases ondita. Onditas y bancos de filtros. Bases biortogonales.
- **Aplicaciones.**

Bases Ondita

Construcción de onditas, por dilataciones y traslación de una familia

$$\left\{ \psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$$

que es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Procesamiento de Señales \Leftrightarrow Análisis Armónico.

Onditas ortogonales

Onditas Ortogonales, dilatadas por 2^j portan las variaciones de la señal en la resolución 2^{-j} .



La construcción de dichas bases puede relacionarse con **Aproximaciones Multirresolución** de señales.



Equivalencia entre **Bases Onditas** y

Filtros Espejo Conjugados

usados en bancos de filtro multi-tasa.



Algoritmos Rápidos.

Segunda Escuela de Posgrado - Red ProTIC -

2007

Bases Ondita Ortogonales

$$x(t) \in L^2(\mathcal{R})$$

la suma parcial de los coeficientes ondita

$$\sum_n \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}(t)$$

puede interpretarse como la diferencia entre dos aproximaciones de f en las resoluciones 2^{-j+1} y 2^{-j} .

Las Aproximaciones Multirresolución

calculan las aproximaciones de f en diferentes resoluciones con **proyecciones ortogonales** en diferentes espacios

$$\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}} ; V_j \subset L^2(\mathcal{R})$$

El parámetro de **escala** 2^j es la **inversa** de la **resolución** 2^{-j} !!!!!

Aproximaciones Multirresolución

Definición: (Mallat, 1989; Meyer, 1992)

Una sucesión $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de subespacios cerrados de $L^2(\mathcal{R})$ es una **aproximación multirresolución** si satisfacen las siguientes propiedades:

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j \quad (1)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j \quad (2)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}, \quad (3)$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \quad (4)$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \text{ es denso en } L^2(\mathcal{R}) \text{ i.e. } \lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = L^2(\mathcal{R}) \quad (5)$$

$$\exists \theta / \{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ es una base de Riesz de } V_0. \quad (6)$$

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$$

(MRA1) V_j es **invariante por traslaciones temporales** proporcionales a la escala 2^j .
 V_j será asimilado a una grilla uniforme a intervalos $2^j \Rightarrow$ caracteriza la aprox. a resolución 2^{-j} .

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j$$

(MRA 2) Condición de Causalidad: Una aproximación en el nivel de resolución 2^{-j} tiene toda la información necesaria para calcular la aproximación en el nivel 2^{-j-1} .

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1},$$

(MRA 3) dilatación de funciones de V_j define aproximaciones en un nivel de resolución mas **tosco** 2^{-j-1}

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\},$$

(MRA 4) Cuando la resolución $2^{-j} \rightarrow 0$,
se pierden detalles de f y

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|P_{V_j} f\| = 0$$

$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$ i.e. $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$

(MRA 5) Cuando la resolución $2^{-j} \rightarrow +\infty$, las
aproximaciones se aproximan a la señal original f
y

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|f - P_{V_j} f\| = 0$$

$\exists \theta / \{\theta(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_0 .

(MRA 6) posibilidad de una discretización.
 θ se interpreta como una célula de resolución unitaria.

Teorema

Una familia $\{\theta(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base de Riesz del espacio V_0 que genera **si y sólo si** existen $A > 0$ y $B > 0$, tales que

$$\forall \omega \in [-\pi, \pi], \quad \frac{1}{B} \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \hat{\theta}(\omega - 2k\pi) \right|^2 \leq \frac{1}{A}.$$

$\forall f \in V_0$, existe única descomposición

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] \theta(t-n)$$

con

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a[n]|^2 \leq B \|f\|^2$$

+ (MRA3)

Estabilidad
Numérica

$\{2^{-j/2} \theta(2^{-j} t - n)\}$ es base de Riesz de V_j con las mismas cotas de Riesz A y B en todas las escalas 2^j .

Funciones de Escala (Scaling)

La aproximación de f en el nivel de resolución 2^{-j} está definida por la proyección ortogonal $P_{V_j} f$ en V_j .

¿ Cómo calcular dicha proyección?

1) ortogonalizar la base de Riesz

2) encontrar una base ortonormal de V_j por dilatación y traslación de una **función de escala** (scaling function) ϕ .

P_{V_j} es la aproximación en la escala 2^j .

Teorema

Sea $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ una aproximación multirresolución y ϕ la **función de escala** cuya transformada de Fourier es

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\hat{\theta}(\omega)}{\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2 \right)^{1/2}}$$

Indiquemos

$$\phi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-n}{2^j}\right)$$

La familia $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_j para todo $j \in \mathbb{Z}$.

(Ver demostración en pag. 225.)

Aproximación por Escalas

$$P_{V_j} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j,n}$$

Aproximación en base ortonormal por escalas

$$a_j[n] = \langle f, \phi_{j,n} \rangle$$

Coefficientes escala

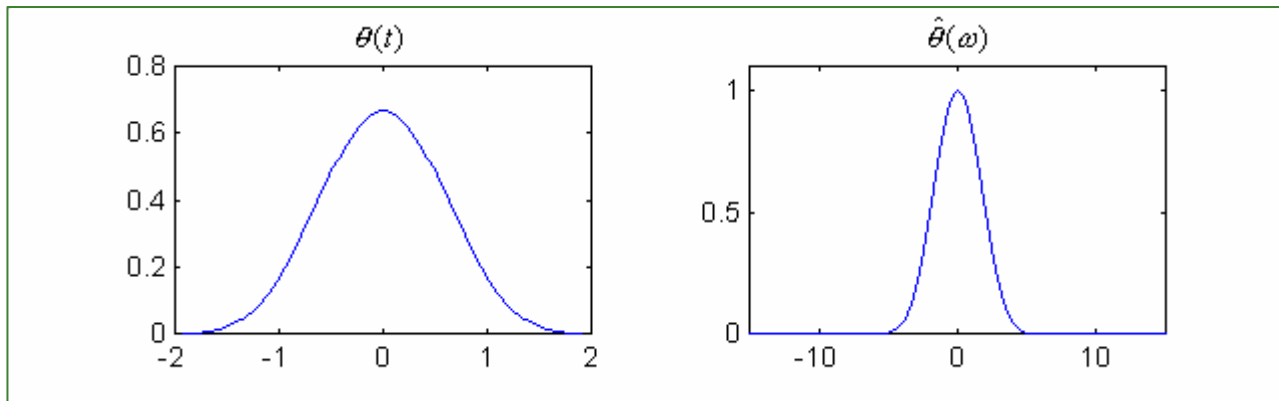
$$a_j[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) dt = f * \bar{\phi}_j(2^j n)$$

$$\bar{\phi}_j(t) = \sqrt{2^{-j}} \phi(2^{-j} t)$$

Ejemplo: Spline Cúbica

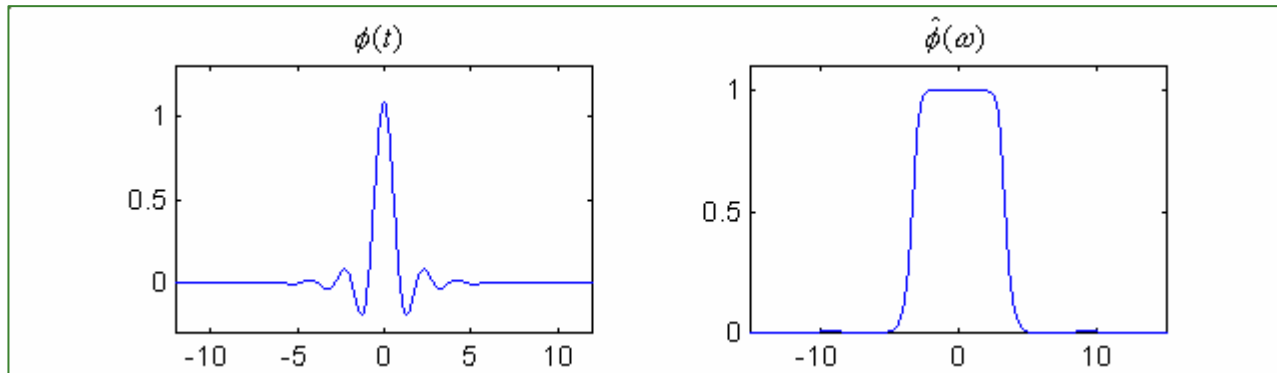
$$\theta(t) = \beta^3(t) = \begin{cases} 1 - |t| + (1/6) |t|^3 - (1/3) (1 - |t|)^3 & \text{si } |t| \leq 1 \\ (2 - |t|)^3 / 6 & \text{si } 1 \leq |t| \leq 2 \\ 0 & \text{si } |t| > 2 \end{cases}$$

$$\hat{\theta}(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^4$$



$\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una Base de Riesz de \mathbf{V}_0

Función de escala Spline Cúbica



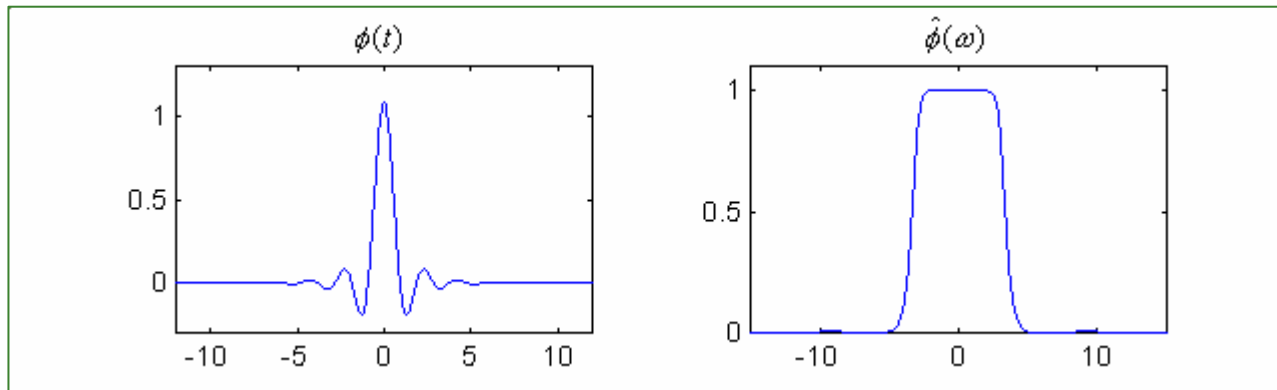
Función de escala Spline Cúbica y su transformada de Fourier

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\exp(-i\varepsilon\omega/2)}{\omega^{m+1} \sqrt{S_{2m+2}(\omega)}}, \quad \text{con}$$

$$S_n(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\omega + 2k\pi)^n}, \quad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es par.} \\ 0 & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases}$$

se calcula con la derivada
2m de

$$S_2(2\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\omega + 2k\pi)^2} = \frac{1}{4 \sin^2 \omega}.$$

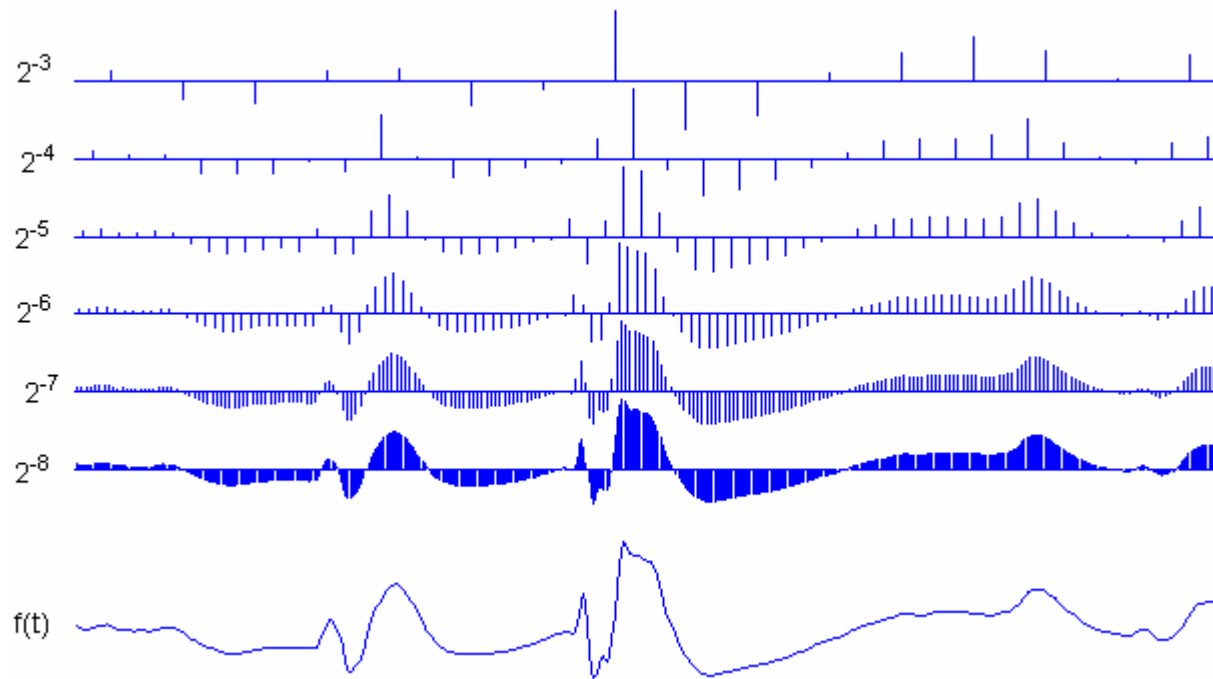


- La energía de $\hat{\phi}(\omega)$ está concentrada en $[-\pi, \pi]$.
- $\sqrt{2^j} \hat{\phi}^*(2^j \omega)$ no es despreciable en $[-2^j \pi, 2^j \pi]$.



Las aproximaciones discretas $a_j[n]$ es un filtrado pasa-bajo de f muestreado en intervalos 2^j .

- $\phi(t)$ tiene soporte infinito pero decae rápidamente a 0.



Aproximaciones multirresolución del EEG mostrado al pie
 Los coeficientes $a_j[n]$ en los niveles de resolución 2^{-j} ,
 calculadas con splines cúbicas.

$L=3$ es el nivel mas tosco de resolución.
 Si $n=\text{length}(f)=2^J$, entonces resuelve para $j=L:J-1$.

(WaveLab802)

```
%CAPTION
fprintf('\n');
disp('Figura 7.3')
disp('La señal original esta al pie')
disp('Las señales discretas siguientes son la
aproximaciones multirresolución')
disp('a_j[n] en las escalas 2^j, (niveles de resolución
2^{-j}),')
disp('calculadas con splines cúbicas.')
fprintf('\n');
disp('L=3 es el nivel mas tosco de resolución')
disp('Si n=length(f)=2^J, entonces resuelve para
j=L:J-1')
fprintf('\n');
%-----
clear all;
close all;
%-----
% axes handles
    delta = 1/20;
    unit = (1-6*delta)/6;
    h1 = [delta delta 1-2*delta 1.5*unit];
    h2 = [delta unit+2*delta 1-2*delta
6*unit];
```

```
%-----
%Gráfica de la señal EEG
load C:\MyMatlabTBs\Detector\detecTB\señales\s
f=f(201:712);
figure(1);clf
    axes('position',h1);
    plot(f)
    text(-25,-1,'f(t)');
    axis([0 length(f) min(f) max(f)])
    axis off

%-----
L = 3;
qmf = MakeONFilter('Daubechies',6);
wc = FWT_PO(f,L,qmf);
figure(1);
    axes('position',h2);
    wcoef = ShapeAsRow(wc);
    [n,J] = dyadlength(wcoef);
    t = (.5:(n-.5));
    LockAxes([0 n 0 (J-L+1)]);
    scale = .9;
    w = wcoef(1:2^L);

for j = L:J-1,
    tj = n.*(.(5:(2^(j+1)-.5))./2^(j+1));
    w = UpDyadLo(w,qmf) +
        UpDyadHi(wcoef(dyad(j)),qmf);
    maxw = max(w);
    newPlotSpikes(J-j,tj, scale .* (w./maxw),n);
    text(-25,-j+J-1/5,sprintf('2^{%d}',-j));
end
axis off
```

Filtros Espejo Conjugados

Ecuaciones de escalas

$$(MRA 2) \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad V_{j+1} \subset V_j$$

$$j = 0, V_1 \subset V_0 \quad \Rightarrow \quad 2^{-1/2} \phi(t/2) \in V_1 \subset V_0$$

$$V_0 = \text{gen}\{\phi(t-n), n \in \mathbb{Z}\} \quad \Rightarrow \quad 2^{-1/2} \phi(t/2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \phi(t-n), \quad (*)$$

donde

$$h[n] = \left\langle 2^{-1/2} \phi(t/2), \phi(t-n) \right\rangle$$

es un filtro

Aplicando FT en (*):

$$\hat{\phi}(2\omega) = 2^{-1/2} \hat{h}(\omega) \hat{\phi}(\omega) \quad \text{con} \quad \hat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-in\omega}$$

¿ Podrá representarse $\hat{\phi}(\omega)$ como producto de dilataciones de $\hat{h}(\omega)$?

$$\forall p \geq 0; \hat{\phi}(2^{-p+1} \omega) = 2^{-1/2} \hat{h}(2^{-p} \omega) \hat{\phi}(2^{-p} \omega)$$

\Downarrow ← (iterando)

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^P \left[\frac{\hat{h}(2^{-p} \omega)}{\sqrt{2}} \right] \hat{\phi}(2^{-P} \omega)$$

Si $\hat{\phi}$ es continua en $\omega = 0 \Rightarrow \lim_{P \rightarrow +\infty} \hat{\phi}(2^{-P} \omega) = \hat{\phi}(0)$

\Downarrow

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \left[\frac{\hat{h}(2^{-p} \omega)}{\sqrt{2}} \right] \hat{\phi}(0) \rightarrow \phi(t)$$

¿ Es $\phi(t)$ una función de escala?

Condiciones necesarias y suficientes (Mallat-1989, Meyer-1992)

Teorema: Sea $\phi \in L^2(\mathcal{R})$ una función de escala integrable

a) La serie de Fourier de

$$h[n] = \langle 2^{-1/2} \phi(t/2), \phi(t-n) \rangle$$

satisface:

$$\text{a.i) } \forall \omega \in \mathcal{R}, \quad \left| \hat{h}(\omega) \right|^2 + \left| \hat{h}(\omega + \pi) \right|^2 = 2,$$

$$\text{a.ii) } \hat{h}(0) = \sqrt{2}.$$

b) **Recíprocamente**, si $\hat{h}(\omega)$

i) es 2π periódica y diferenciable con continuidad en un entorno de $\omega=0$

ii) satisface (a.i) y (a. ii) del punto anterior y

$$\text{iii) } \inf_{\omega \in [-\pi/2, \pi/2]} \left| \hat{h}(\omega) \right| > 0$$

Entonces

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \left[\frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \right] \hat{\phi}(0)$$

es la FT de una función de escala $\phi \in L^2(\mathcal{R})$

Filtros Espejo Conjugados

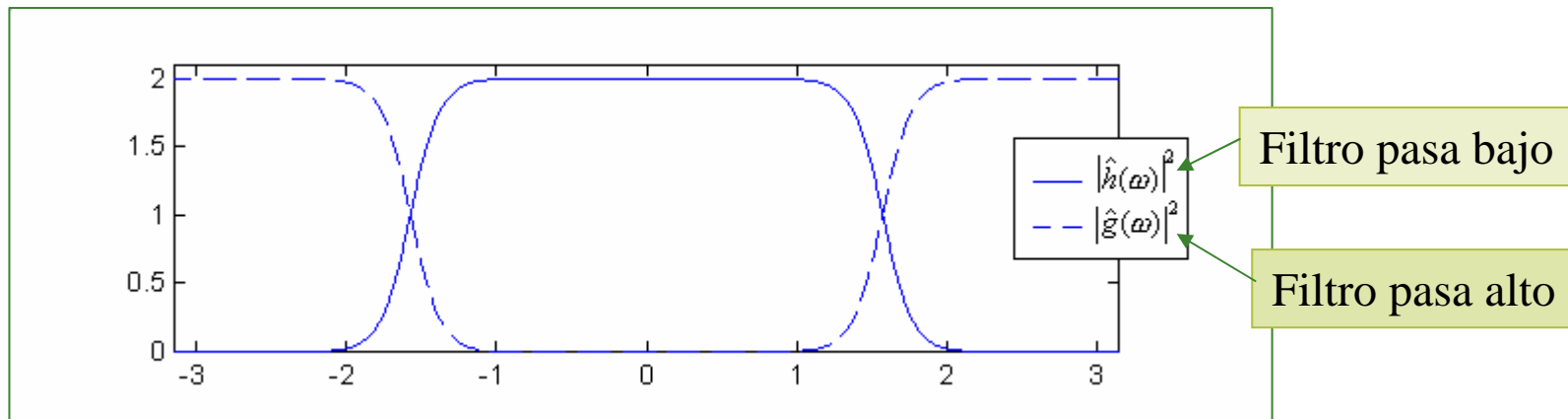
Los filtros discretos que satisfacen la condición

$$\text{a.i) } \forall \omega \in \mathfrak{R}, \quad \left| \hat{h}(\omega) \right|^2 + \left| \hat{h}(\omega + \pi) \right|^2 = 2,$$

se denominan **Filtros Espejo Conjugados (CMF)**.

Utilidad:

Permiten descomponer una señal discreta en bandas de frecuencia separadas mediante bancos de filtros.




$|\hat{h}(\omega)|^2, \omega \in [-\pi, \pi]$ para una multirresolución spline cúbica

Onditas Ortogonales

Las **onditas** ortogonales llevan los **detalles** necesarios para aumentar la resolución de una señal aproximada.

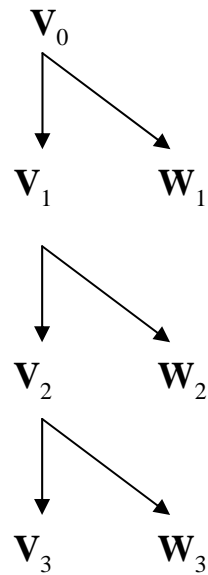
Las aproximaciones de f en las escalas 2^j y 2^{j-1} son sus proyecciones ortogonales en los espacios V_j y V_{j-1} .

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j-1} \quad \Rightarrow \quad V_{j-1} = V_j \oplus W_j$$

$$P_{V_{j-1}} f = P_{V_j} f + P_{W_j} f$$


Lleva los **detalles** de f que aparecen en la escala 2^{j-1} , pero que desaparecen en la escala **más tosca** 2^j .

Descomposición en subespacios



Construcción de bases ortogonales de W_j

Teorema:

Sea ϕ una función de escala y h el correspondiente filtro espejo conjugado. Sea ψ la función cuya transformada de Fourier es

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \text{ con } \hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi).$$

Indiquemos
$$\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right).$$

Para cualquier escala 2^j , $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_j .

Para todas las escalas, $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Dem:

$$i \quad \hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) ?$$

$$(MRA 2: V_1 \subset V_0) \quad V_0 = V_1 \oplus W_1$$

$$\psi(t/2) \in W_1 \subset V_0 = \text{gen}\{\phi(t-n), n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\psi(t/2) = \sum a_0[n] \phi_{0,n}(t), \text{ con } a_0[n] = \langle \psi, \phi_{0,n} \rangle.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi(t/2) = \sum g[n] \phi(t-n), \text{ con } g[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \psi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \right\rangle.$$

Aplicando FT:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} 2 \hat{\psi}(2\omega) = \hat{g}(\omega) \hat{\phi}(\omega).$$

Lema (previo para continuar la Dem)

La familia $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_j si y sólo si

$$|\hat{g}(\omega)|^2 + |\hat{g}(\omega + \pi)|^2 = 2$$

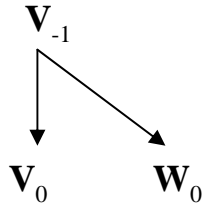
$$\text{y} \quad \hat{g}(\omega) \hat{h}^*(\omega) + \hat{g}(\omega + \pi) \hat{h}^*(\omega + \pi) = 0$$

Ideas importantes de la demo del Lema:

- $\{\psi_{0,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal $\Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad I(\omega) = \sum |\psi(\omega + k\pi)|^2 = 1$
- W_0 es ortogonal a $V_0 \Leftrightarrow \{\psi_{0,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}} \perp \{\phi_{0,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$
- Verifica que $V_{-1} = V_0 \oplus W_0$:

$\forall a[n] \in l^2(\mathbb{Z}), \exists b[n] \in l^2(\mathbb{Z})$ y $c[n] \in l^2(\mathbb{Z})$ t.q.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] \sqrt{2} \phi(2[t - 2^{-1}n]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b[n] \phi(t - n) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c[n] \psi(t - n)$$



$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[n] \sqrt{2} \phi(2[t - 2^{-1}n]) \stackrel{?}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b[n] \phi(t - n) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c[n] \psi(t - n)$$

Aplicando FT :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{b}(\omega) \hat{\phi}(\omega) + \hat{c}(\omega) \hat{\psi}(\omega)$$

Como

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{y} \quad \hat{\phi}(\omega) = 2^{-1/2} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

La ecuación se satisface necesariamente si

$$\hat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{b}(\omega) \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \hat{c}(\omega) \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Definimos

$$\hat{b}(2\omega) = \frac{1}{2} \left[\hat{a}(\omega) \hat{h}^*(\omega) + \hat{a}(\omega + \pi) \hat{h}^*(\omega + \pi) \right] \Rightarrow a[n]$$

$$\hat{c}(2\omega) = \frac{1}{2} \left[\hat{a}(\omega) \hat{g}^*(\omega) + \hat{a}(\omega + \pi) \hat{g}^*(\omega + \pi) \right] \Rightarrow b[n]$$

Donde valen las hipótesis del lema y además que

$$|\hat{h}^*(\omega)|^2 + |\hat{h}^*(\omega + \pi)|^2 = 2$$

¿ Que decía nuestro teorema ?

Teorema: Sea ϕ una función de escala y h el correspondiente filtro espejo conjugado. Sea ψ la función cuya transformada de Fourier es

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \text{ con } \hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi).$$

Indiquemos
$$\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right).$$

Para cualquier escala 2^j , $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_j .

Para todas las escalas, $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

(cont. Demo Teorema)

por Hipótesis : $\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi)$. \Rightarrow valen las hip. del lema \Rightarrow

☺ $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_j

☺ Los espacios detalle $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ son ortogonales

$$W_j \perp V_j \quad ; \quad W_l \subset V_{l-1} \subset V_j \quad \forall j < l \quad \Rightarrow \quad W_j \perp W_l$$

☺ $L^2(\mathfrak{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j$

$$W_j \perp V_j \quad ; \quad V_{j-1} = W_j \oplus V_j \quad \Rightarrow$$

$$J < L, \quad V_J = W_{J+1} \oplus V_{J+1} = W_{J+1} \oplus W_{J+2} \oplus V_{J+2} = W_{J+1} \oplus \dots \oplus W_L \oplus V_L$$

$$V_J = \bigoplus_{j=J+1}^L W_j \oplus V_L \quad , \quad \text{si } J < L$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \{0\} \Rightarrow \lim_{L \rightarrow +\infty} V_J = \bigoplus_{j=J+1}^{+\infty} W_j \oplus \lim_{L \rightarrow +\infty} V_L = \bigoplus_{j=J+1}^{+\infty} W_j$$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \text{clos} \left(\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j \right) = L^2(\mathfrak{R}) \Rightarrow L^2(\mathfrak{R}) = \lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j$$

La dem del Teorema \Rightarrow

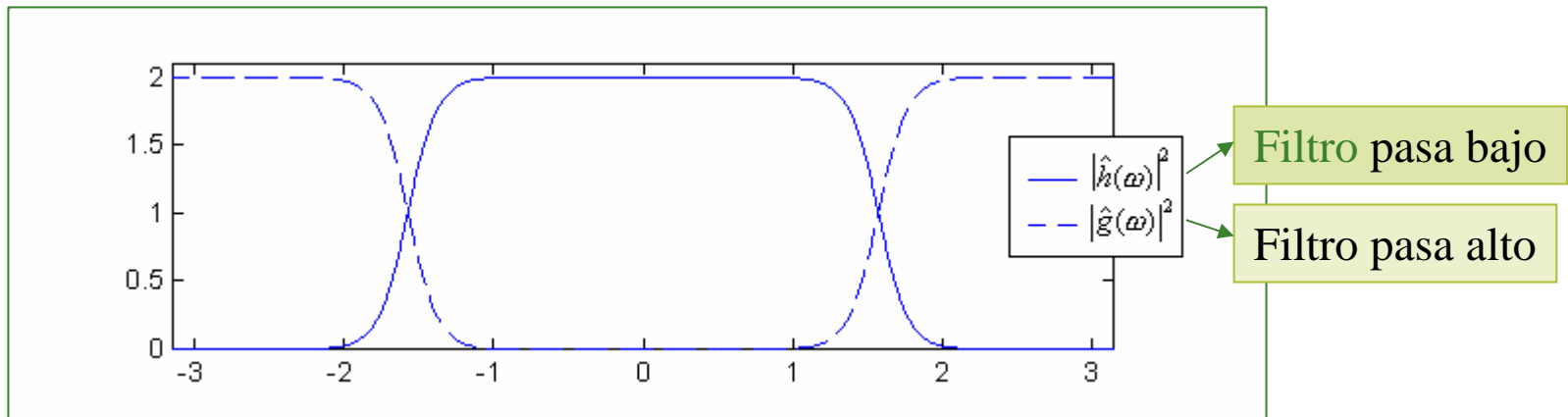
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi(t/2) = \sum g[n] \phi(t-n), \text{ con } g[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \psi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \right\rangle.$$

$$y \quad \hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi) \text{ por Hipótesis.}$$

Aplicando FT⁻¹ \Rightarrow

$$g[n] = (-1)^{1-n} h[1-n].$$

Filtro espejo para la ondita



Descomposición ondita

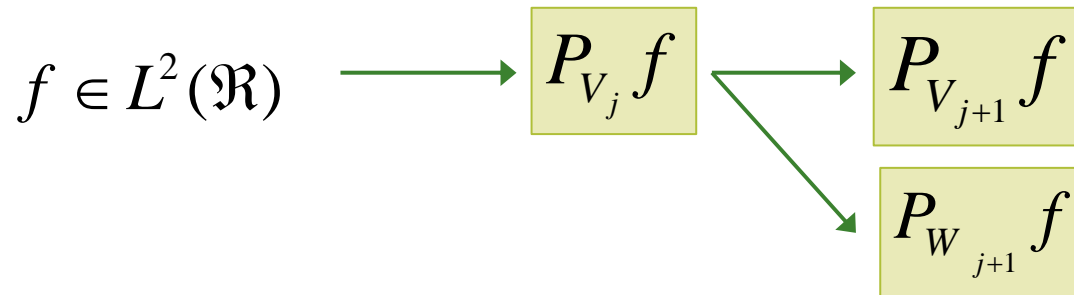
$$f \in L^2(\mathfrak{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j$$

$$P_{W_j} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$$

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} P_{W_j} f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}(t)$$

Descomposición Ondita de $f(t)$

Onditas y Bancos de Filtros



$$a_j[n] = \langle f, \phi_{j,n} \rangle \quad \text{y} \quad d_j[n] = \langle f, \psi_{j,n} \rangle$$

$$\bar{x}[n] = x[-n]$$

Reflexión

y

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} x[p] & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si } n = 2p-1 \end{cases}$$

Up Sampling

Transformada Ondita Ortogonal Rápida

Descomposición

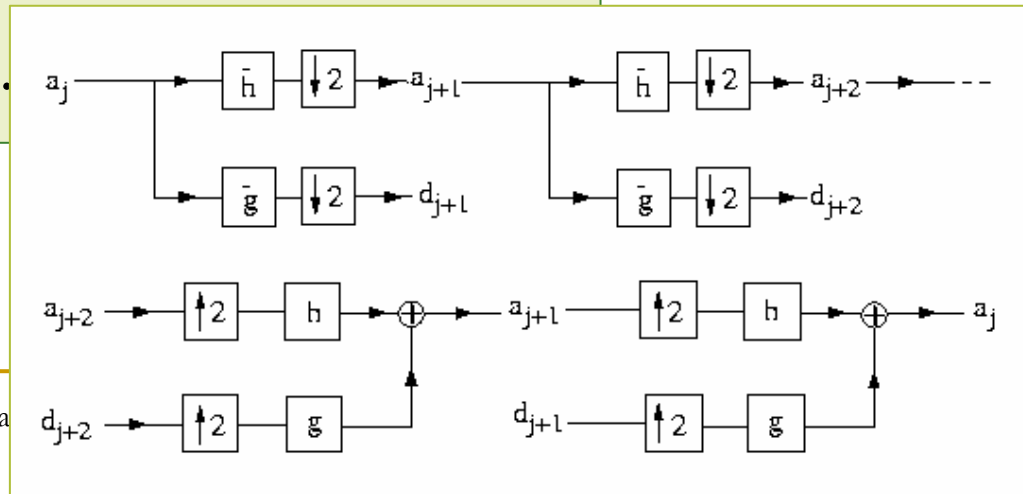
$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-2p] a_j[n] = a_j * \bar{h}[2p]$$

$$d_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-2p] a_j[n] = a_j * \bar{g}[2p]$$

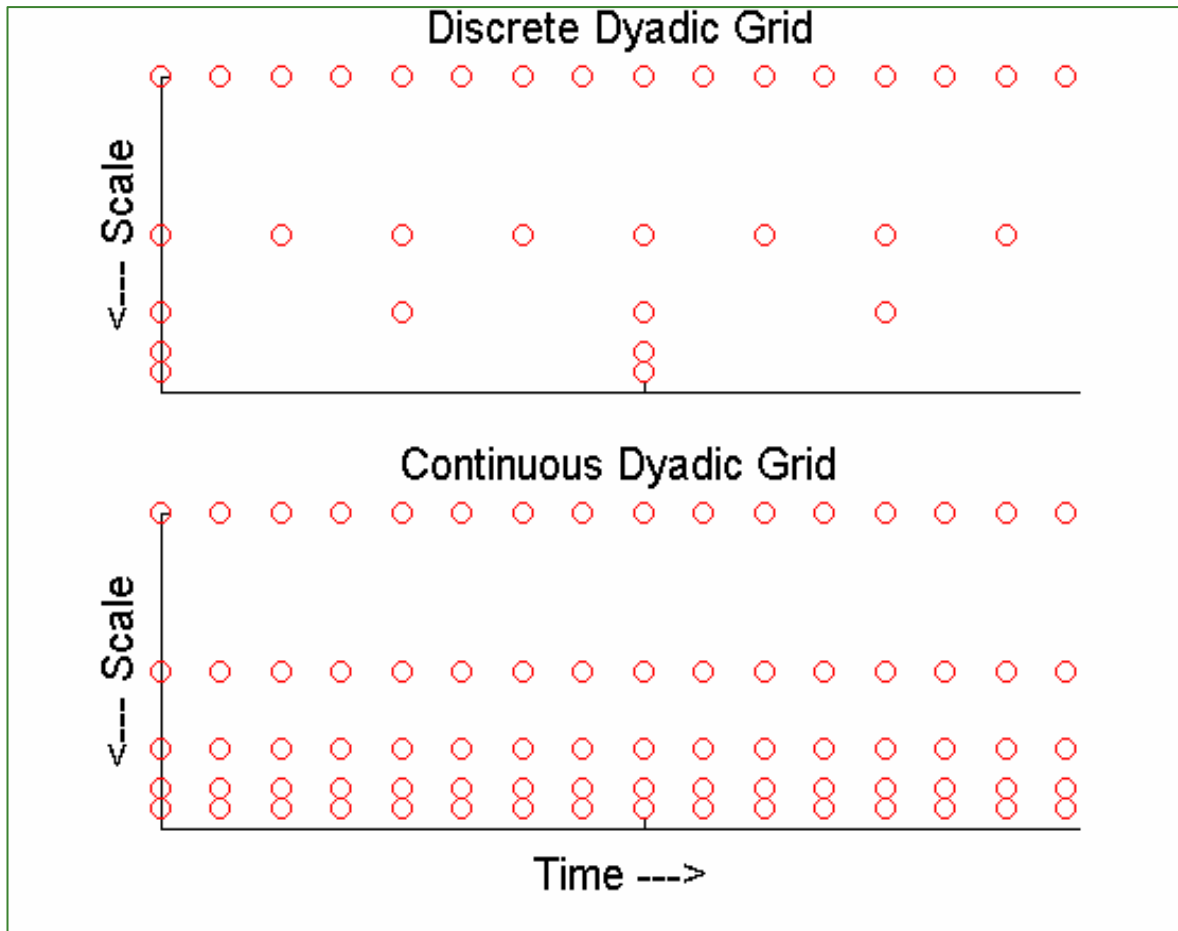
Reconstrucción

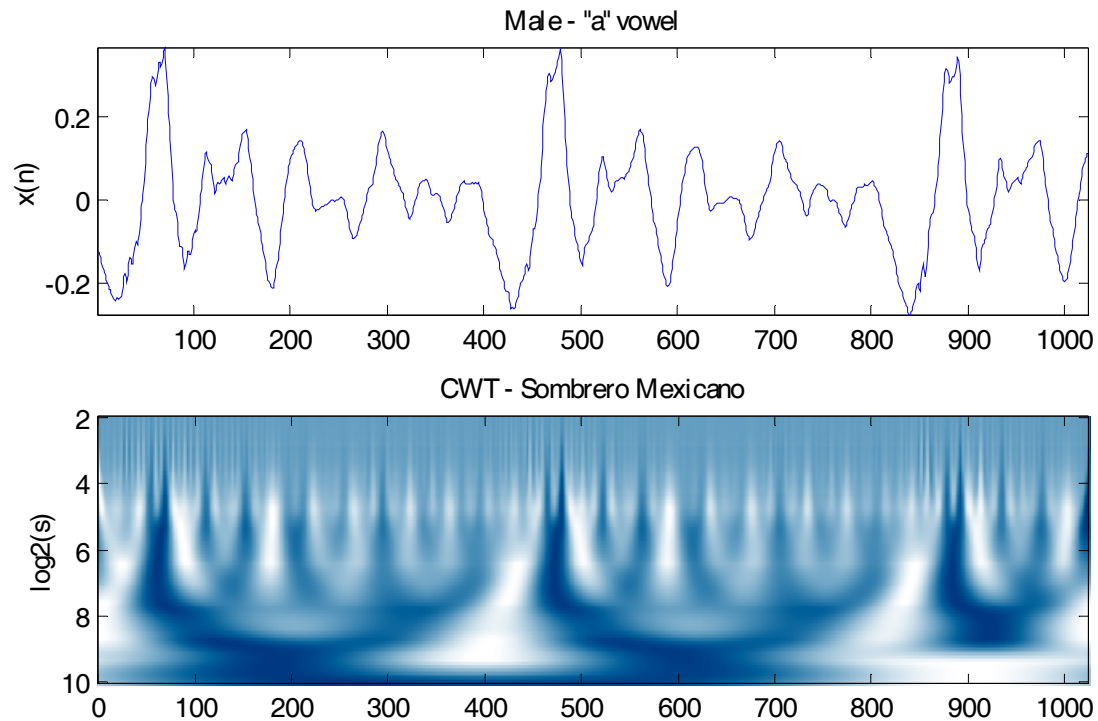
$$a_j[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[p-2n] a_{j+1}[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[p-2n] d_{j+1}[n]$$

$$= \check{a}_{j+1} * h[p] + \check{d}_{j+1} * g[p].$$

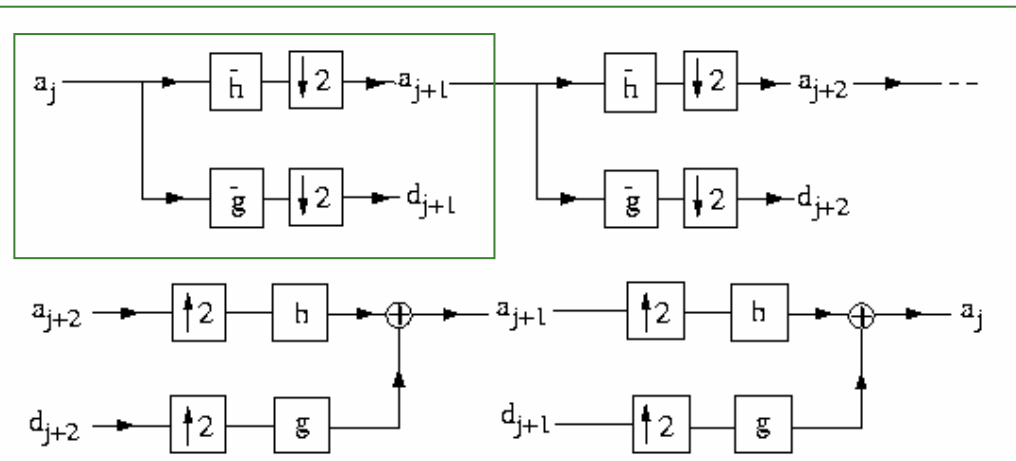
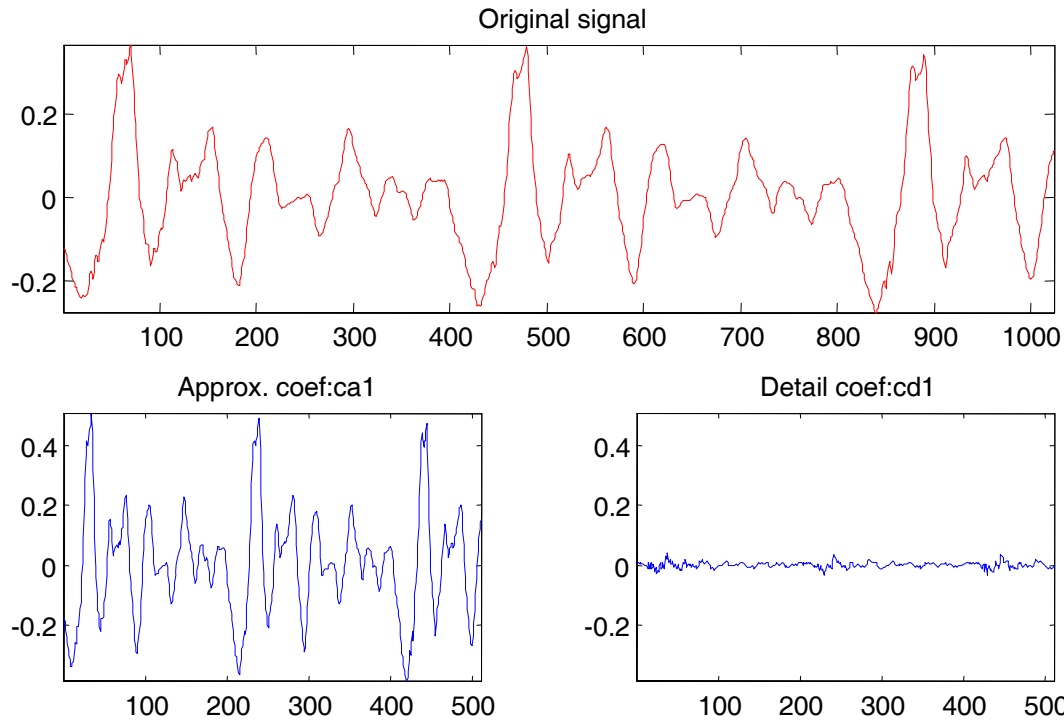


Wavelet Discreta vs. Wavelet Continua

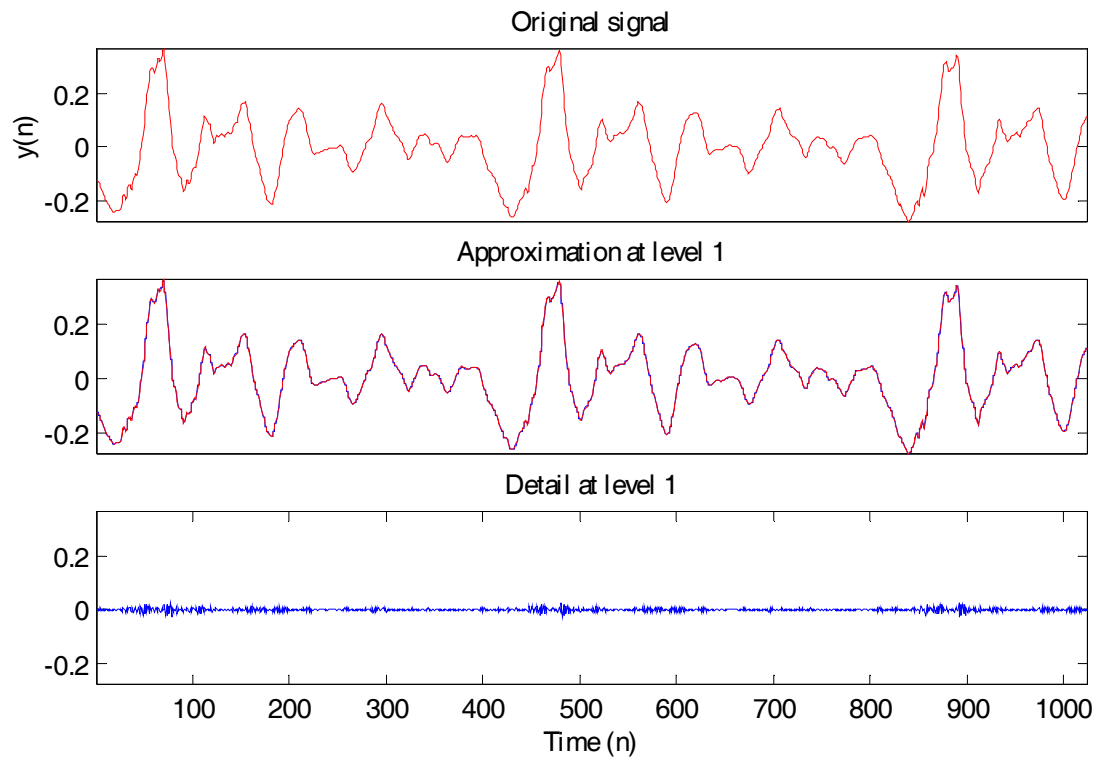




Escalograma obtenido con la
descomposición Wavelet (cuasi-) continua

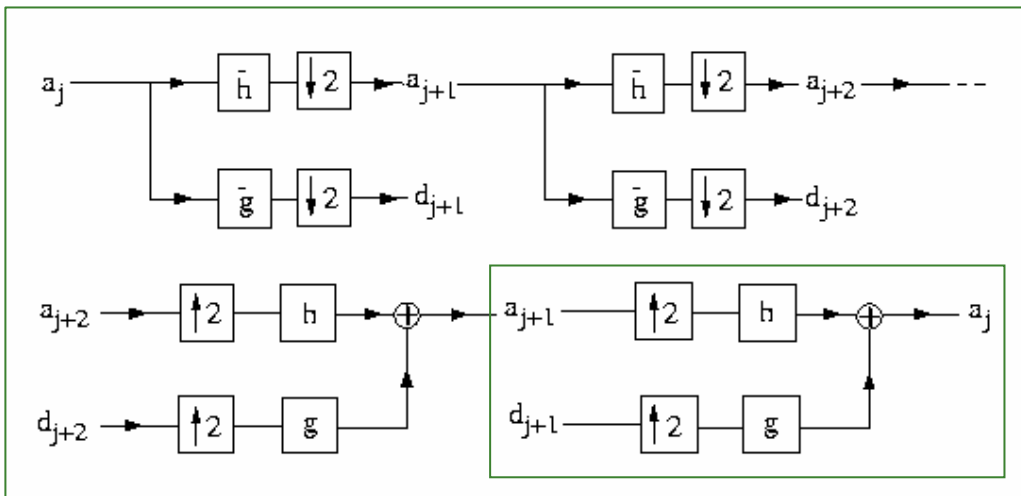
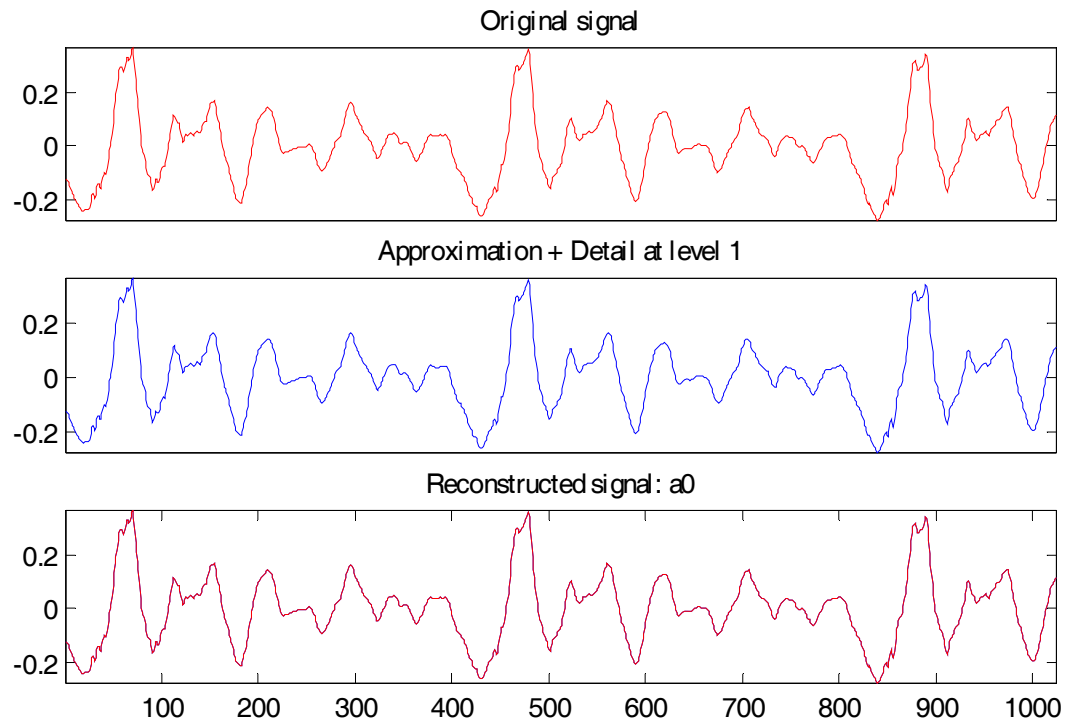


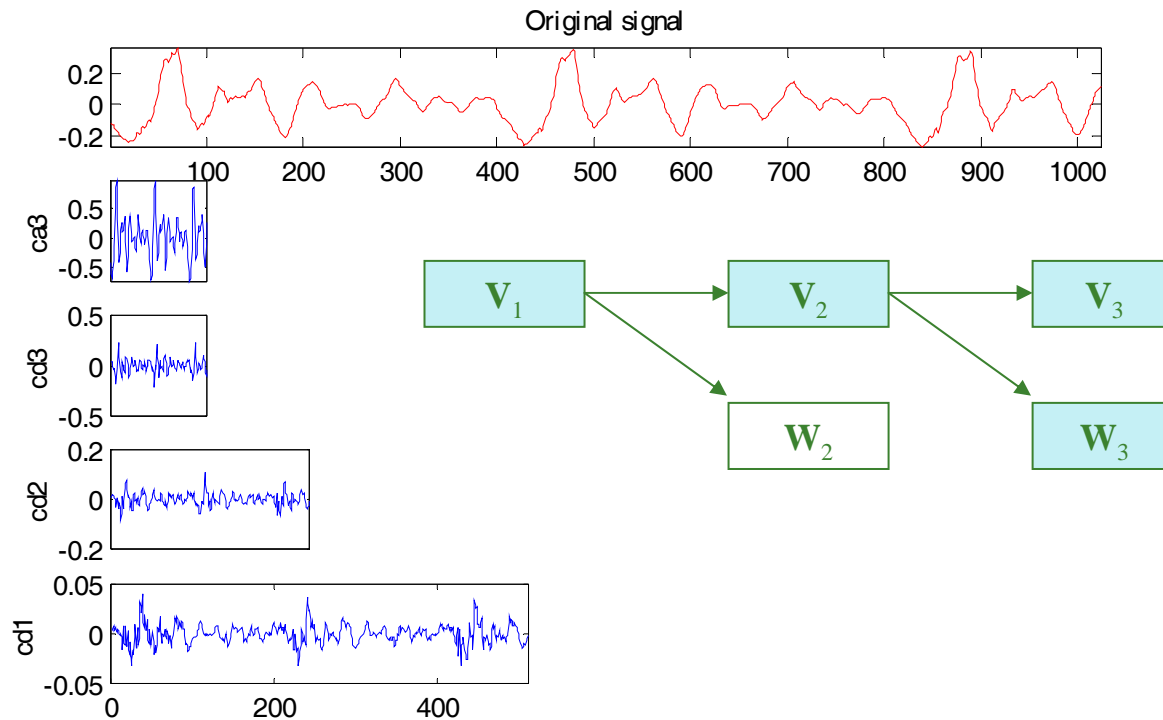
DWT de la "a" sostenida
 con la ondita de Daubechies
 de orden 1
 coeficientes del Nivel 1



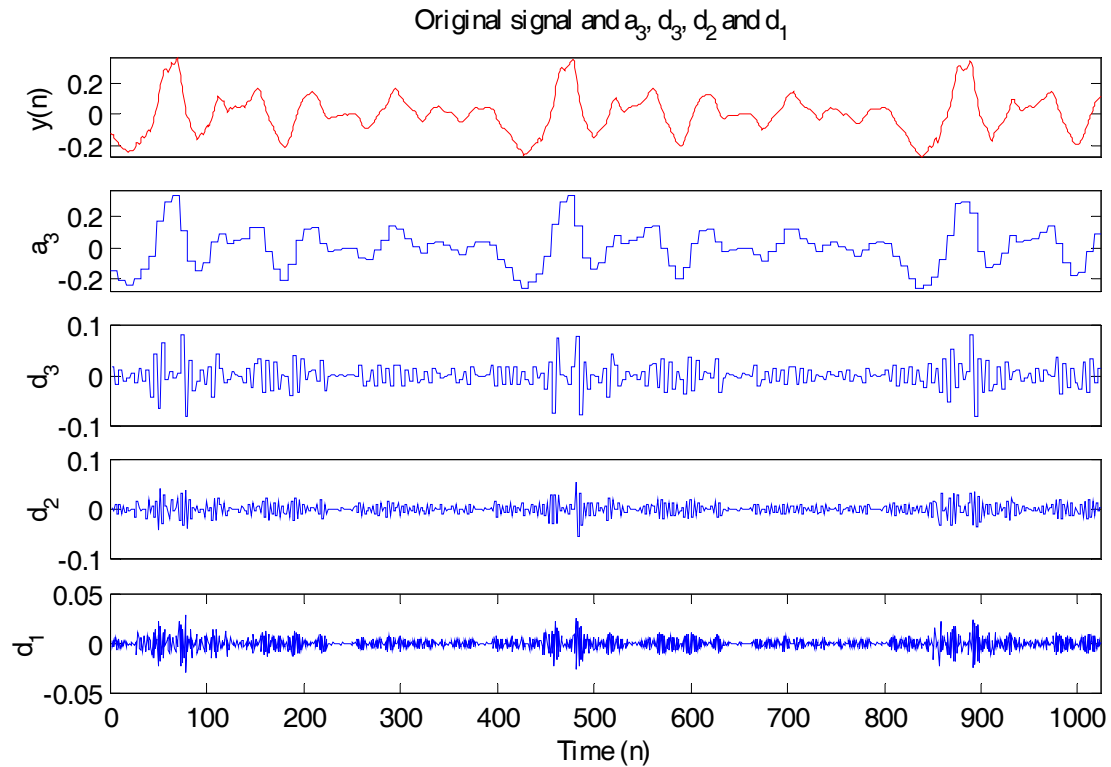
$$P_{V_1} f$$

$$P_{W_1} f$$

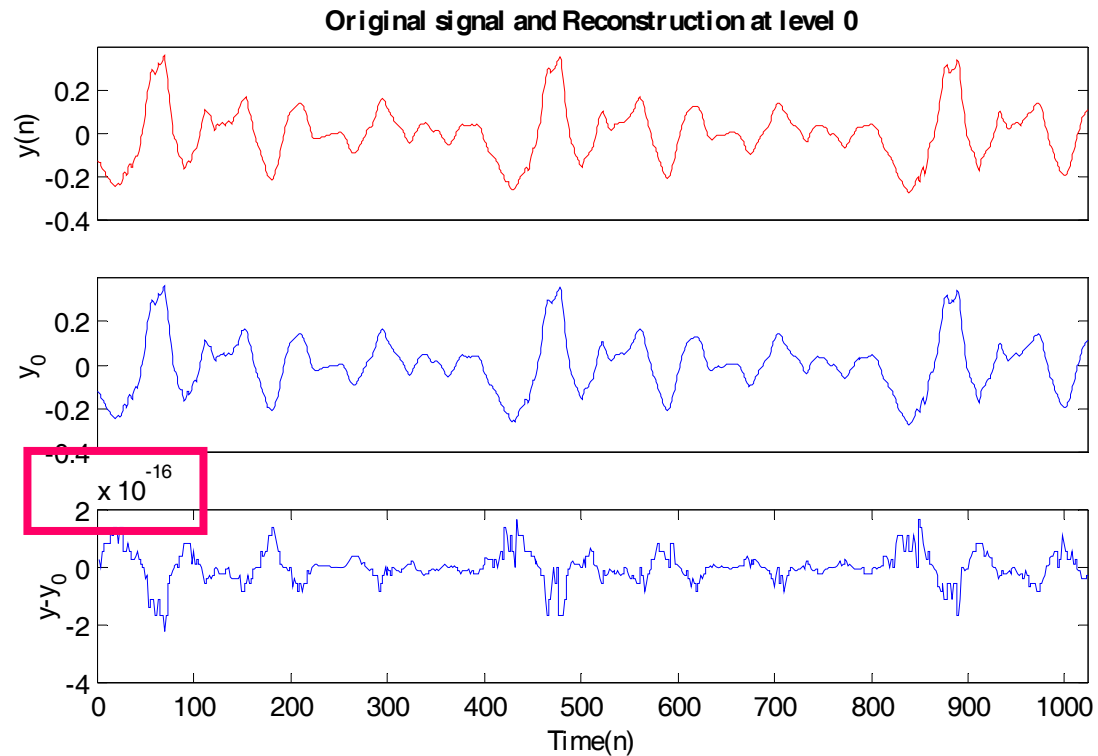




Coeficientes de la descomposición hasta nivel 3



Reconstrucción de la señal a partir de una descomposición de nivel 3



Error de la aproximación por ondita Daubechies -db1

Ahora se esta en condiciones de leer la sección
5.5.1 de diseño de onditas y bancos de filtros