



Transformada Ondita. Teoría y Aplicaciones

(Clase 5)

Dra. María Eugenia Torres

Universidad Nacional de Entre Ríos
Facultad de Ingeniería
Laboratorio de Señales y
Dinámicas no Lineales

metorres@ceride.gov.ar

Contenidos

- **Introducción**
Elementos de Matemáticas avanzadas. Operadores lineales. Proyecciones. Espacios vectoriales. Filtros lineales invariantes en el tiempo. Integrales de Fourier en L^1 y en L^2 . Propiedades. Filtros lineales discretos invariantes en el tiempo. Señales finitas.
- **Análisis tiempo-frecuencia**
La transformada Fourier por ventanas. La transformada ondita. Frecuencia instantánea. Energía tiempo-frecuencia instantánea.
- **Marcos**
Teoría de Marcos. Marcos en Fourier y en onditas. Invariancia ante traslación. Transformada Ondita Diádica.
- **Bases Ondita.**
Bases onditas ortogonales. Aproximaciones Multirresolución. Funciones escala. Filtros espejo conjugados. Clases de bases ondita. Onditas y bancos de filtros. Bases biortogonales.
- **Aplicaciones.**

Elementos de Algebra Lineal

$$A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{R}^{p \times q}, \quad A^t = (a_{j,i}) \in \mathfrak{R}^{q \times p} \quad \text{Traspuesta de } A$$

$$A \in C^{p \times q}, \quad A^H = (a_{j,i}^*) \in C^{q \times p} \quad \text{Traspuesta Hermitiana de } A \\ \text{o Adjunta Hermitiana de } A$$

A se dice **Simétrica** *sii* $A = A^t$

Hermítica o Hermitiana *sii* $A = A^H$

Unitaria *sii* $A^{-1} = A^H$ y $A^{-1} A = A A^{-1} = I$

Ortonormal u ortogonal *sii* es real y unitaria.

Propiedades (I)

Una matriz **ortonormal** A
preserva el producto interno (real) de dos
vectores reales

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{si } A \text{ ortogonal, } x, y \text{ de } \mathbb{R}^n$$

Una matriz **unitaria** U
preserva el producto interno de dos vectores
complejos

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{si } U \text{ unitaria, } x, y \text{ de } \mathbb{C}^n$$

Descomposición en valores singulares (SVD)

Ben Noble y James W. Daniel, "Algebra Lineal Aplicada", cap. 8, 2da ed., Prentice Hall, 1989.

A matriz $p \times q$

$\exists U \in C^{p \times p}$ unitaria (Ortogonal si A es real)

$\exists V \in C^{q \times q}$ unitaria (Ortogonal si A es real)

$\exists \Sigma \in C^{p \times q}$ diagonal /

$$\Sigma_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \sigma_i \geq 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$\sigma_i \geq \sigma_j \text{ si } i > j$$

$$A = U \Sigma V^H \quad (\text{o } A = U \Sigma V^T \text{ si A es real)}$$

SVD (cont)

$$A = U \Sigma V^H \quad (\text{o } A = U \Sigma V^T \text{ si } A \text{ es real})$$

Valores singulares de A

Vectores singulares izquierdos

σ_i^2 autovalores de $A^H A$
 v_i : cols. de V , autovect. asoc.
 σ_i^2 autovalores de $A A^H$
 u_i : cols. de U , autovect. asoc.

$$u_i^H A = \sigma_i v_i^H$$

$$A v_i = \sigma_i u_i$$
$$i = 1, \dots, s$$
$$s = \min(p, q).$$

Vectores singulares derechos

Ejemplo (SVS)

$$A_T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

```
A=[2 0 ;-1 sqrt(3) ; -1 -sqrt(3)];
```

```
x =
```

```
2.0000    0  
-1.0000  1.7321  
-1.0000 -1.7321
```

```
A'*A
```

```
A'*A =
```

```
6  0  
0  6
```

X no es unitaria

```
A*A'
```

```
A*A' =
```

```
4.0000 -2.0000 -2.0000  
-2.0000 4.0000 -2.0000  
-2.0000 -2.0000 4.0000
```

```
%-----
```

```
ev2=eigs(A*A')
```

```
ev2 =
```

```
6.0000  
6.0000  
-0.0000
```

```
%-----
```

```
sqrt(6) = 2.4495
```

$$[U, S, V] = \text{svd}(A_T) \quad \text{Autovectores de } A'A$$

Unitarias
(Ortogonal)

$$U = \begin{bmatrix} 0.8165 & -0.0000 \\ -0.4082 & 0.7071 \\ -0.4082 & -0.7071 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2.4495 & 0 \\ 0 & 2.4495 \end{bmatrix} \quad (\sigma_i)^2 = \lambda_i$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Autovectores de } AA'$$

$$A_T = U S V^t = U S V^H$$

$$A_T v_i = \sigma_i u_i$$

$$A_T^H u_i = \sigma_i v_i$$

$$(\sigma_i)^2 = \lambda_i$$

σ_i valores singulares de A_T

```

%-----
sv=svds(A) % valores singulares de A
sv =
    2.4495
    2.4495
%-----
ev1=eigs(A'*A)
ev1 =
    6.0000
    6.0000
%-----
ev2=eigs(A*A')
ev2 =
    6.0000
    6.0000
   -0.0000
%-----
sqrt(6) = 2.4495
%-----
norm(A) = 2.4495
    
```

“marco”

$$\|A_T\|_2 = \sqrt{6} = 2.4495$$

SVD y transformaciones lineales

$$T : V \rightarrow W \quad \dim(V)=q, \dim(W)=p;$$

$$T(v) = A.v, \quad A \in C^{p,q}$$

- El $\text{rg}(A) = k$ es igual al número de valores singulares de A no nulos.
- Los primeros k vectores singulares izquierdos u_1, \dots, u_k forman una base ortonormal del espacio de columnas de A ,
i.e. para el codominio de $T(v) = Av$
- Los últimos $q - k$ vectores singulares derechos v_{k+1}, \dots, v_q forman una base ortonormal del espacio nulo de T (del núcleo de T).

SVD y normas

$A = (a_{i,j})$ es $p \times q$, $\mathbf{T}(v) = \mathbf{A}v$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^q |a_{i,j}| \qquad \|A\|_\infty = \max_j \sum_{i=1}^q |a_{i,j}|$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_2 &= \left(\max \text{Autovalor de } \mathbf{A}^H \mathbf{A} \right)^{1/2} \\ &= \max \text{Valor Singular de } \mathbf{A} \end{aligned}$$

Mínimos Cuadrados, Pseudo Inversa y Valores Singulares

$A = U \Sigma V^H$ una SVD de A, $p \times q$, de rango k

$A^+ = V \Sigma^+ U^H$ es la **Pseudo Inversa de A**

donde $\Sigma^+ = (\Sigma_{i,j}^+)$ $p \times q$ / $\Sigma_{i,j}^+ = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1/\sigma_i & i = j \end{cases}$

con $\sigma_i \neq 0$, $1 \leq i \leq k$; $\sigma_i = 0$, $k+1 \leq i \leq \min\{p, q\}$

- $x_0 = A^+ b$ hace mínima $\|A x - b\|_2$, con respecto a x .
- Entre todas las x' que hacen mínima $\|A x - b\|_2$, $x_0 = A^+ b$ es el ínfimo.
- x' hace mínima $\|A x - b\|_2 \Leftrightarrow x' = x_0 + v$, donde v es una c.l. arbitraria de las $q-k$ columnas finales de V y $x_0 = A^+ b$.

Aplicación

Compresión de datos

1 foto = 1000 x 1000 y 10 tonos de grises \Rightarrow 10^6 datos

2 r vectores u_i y v_i + r números $\sigma_i \Leftrightarrow$

si $r = 5 \Leftrightarrow 2 \cdot 5 \cdot 1000 + 5 = 10.005$ datos

Ahorro
de 99%

Pseudo Inversa

$A = U \Sigma V^H$ una SVD de A , $p \times q$, de rango k

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{i,j} \end{bmatrix}, \quad \sigma_{i,i} = \sigma_i; \quad \sigma_{i,j} = 0 \quad \text{para } i \neq j.$$

$A^+ = V \Sigma^+ U^H$ es la **Pseudo Inversa de A**

$$\text{donde } \Sigma^+ = \left(\Sigma_{i,j}^+ \right)_{p \times q} / \Sigma_{i,j}^+ = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1/\sigma_i & i = j \end{cases}$$

con $\sigma_i \neq 0, \quad 1 \leq i \leq k$; $\sigma_i = 0, \quad k+1 \leq i \leq \min\{p, q\}$

Ejemplo (cont) $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ / $T\mathbf{v} = A_T \cdot \mathbf{v}$

$$A_T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow r_1 \\ \leftarrow r_2 \\ \leftarrow r_3 \end{array}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0.3333 & -0.1667 & -0.1667 \\ 0 & 0.2887 & -0.2887 \end{bmatrix}$$

Pseudoinversa

$$A^+ A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = A_T A^+ = \begin{bmatrix} 0.67 & -0.33 & -0.33 \\ -0.33 & 0.67 & -0.33 \\ -0.33 & -0.33 & 0.67 \end{bmatrix}$$

P actúa como una "identidad en parte del espacio:

$$A^+ P = \begin{bmatrix} 0.33 & -0.1667 & -0.1667 \\ 0 & 0.2887 & -0.2887 \end{bmatrix} = A^+$$

$$P A_T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1.7321 \\ -1 & -1.7321 \end{bmatrix} = A_T$$

Bases y Marcos - Introducción

Toda transformación lineal T es un
“cambio de base”.

¿ Cómo elegir una “buena” base en el espacio
de representación?.

¿ Qué es una base?.

Una base es una sucesión de vectores
 $\{v_1, v_2, \dots\}$ o de funciones $\{e_1, e_2, \dots\}$ con la
propiedad de **representación única**.

Bases

Todo vector v (o función $f(t)$) puede representarse de manera **única** (una y sólo una) como

$$v = \sum b_i v_i \quad \text{ó} \quad f(t) = \sum b_i e_i(t) .$$

Para **cada** vector existe una **única** representación.

- El vector nulo sólo puede representarse con $b_i = 0 \forall i$.
- Las funciones base son linealmente independientes.

Propiedades de las Bases

- Independencia Lineal (I.L.)
- Completitud

- Si se agregan vectores, se pierde la independencia lineal.
 - Si se sacan vectores, se pierde la completitud.

Bases en espacios de Hilbert

H espacio de Hilbert

$\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia ortogonal en $H \Leftrightarrow \langle e_n, e_p \rangle = 0, \forall n \neq p$

$\{e_n\}_n$ es **base ortogonal** sii

i) $\{e_n\}$ es ortogonal

ii) $\forall f \in H, \exists \{\lambda[n]\} / \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda[n] e_n \right\| = 0$



$$\lambda[n] = \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_n\|^2}$$

y se escribe:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} e_n$$

Base ortonormal

$\{e_n\}$ es ortonormal sii es ortogonal y $\|e_n\| = 1$

- Si $\{e_n\}$ es ortonormal, es linealmente independiente (l.i.).

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle \langle g, e_n \rangle^*$$

Ec. de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2$$

Fórmula de Plancherel

Un **espacio** de Hilbert que admite base ortogonal se dice **separable**

$L^2(\mathbb{R})$ y $l^2(\mathbb{Z})$ son espacios separables

Base ortonormal

$\{e_n\}$ es ortonormal sii es ortogonal y $\|e_n\| = 1$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2$$

Fórmula de Plancherel

Siendo ahora

$$\lambda[n] = \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} = \langle f, e_n \rangle \rightarrow$$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda[n]|^2$$

Fórmula de Plancherel

Bases de Riesz (def.)

Debilitando la condición de ortogonalidad en H (Hilbert)

$$\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

**Es una Base de Riesz o
Base Incondicional**

Si satisface:

i) Es linealmente independiente

ii)

$$\forall f \in H, \exists \{\lambda[n]\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ tal que } f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda[n] e_n.$$

$$\frac{1}{B} \|f\|^2 \leq \sum_n |\lambda[n]|^2 \leq \frac{1}{A} \|f\|^2$$

¿Marcos o Bases de Riesz?

Un marco $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ tiene **una** de las prop. de las bases de Riesz

➤ $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ genera el espacio H:

$$\forall f \in H, \quad Uf[n] = \sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

➤ Pero no necesariamente son L.I.

Un marco es asociado con sobre-muestreo o redundancia

Ejemplo

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad / \quad T\mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow r_1 \\ \leftarrow r_2 \\ \leftarrow r_3 \end{array}$$

- Los vectores $\{r_1, r_2, r_3\}$ no son L.I. pero generan \mathbb{R}^2 .

$$v \in \mathbb{R}^2, \quad v = \sum_{i=1}^3 \frac{\langle r_i, v \rangle}{6} r_i$$

$$\sum_{i=1}^3 |\langle v, r_i \rangle|^2 = 6 \|v\|^2 \longrightarrow$$

Es un
marco justo

$\{r_1, r_2, r_3\}$ es un **marco** de \mathbb{R}^2 .

Ejemplo

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad / \quad T\mathbf{v} = A_T \cdot \mathbf{v}$$

$$A_T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow r_1 \\ \leftarrow r_2 \\ \leftarrow r_3 \end{array}$$

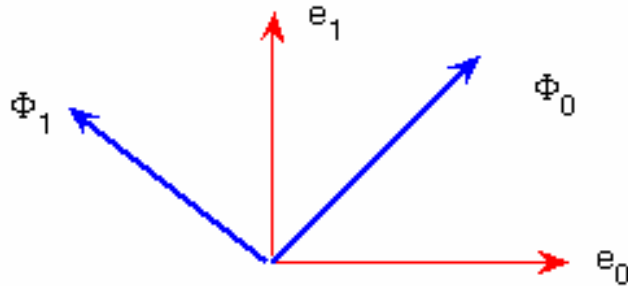
$$A^+ = \begin{bmatrix} 0.3333 & -0.1667 & -0.1667 \\ 0 & 0.2887 & -0.2887 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{v}_1^+ & \mathbf{v}_2^+ & \mathbf{v}_3^+ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 b_i \mathbf{v}_i^+ = \sum_{i=1}^3 \langle r_i, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}_i^+ = \sum_{i=1}^3 \langle r_i, \mathbf{v} \rangle \frac{1}{6} r_i$$

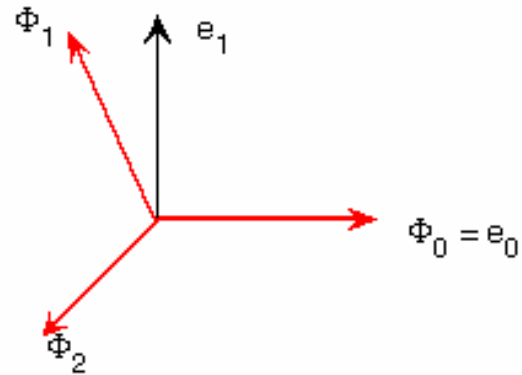
- Podemos recuperar \mathbf{v} a partir de las columnas \mathbf{v}_i^+

- el n -ésimo vector de **análisis** marco es r_n .
- la n -ésima coordenada es $\langle r_n, \mathbf{v} \rangle$
- el n -ésimo vector de **síntesis** marco es \mathbf{v}_n^+

Base vs marco



Bases ortogonales



Marco en \mathbb{R}^2

¿Dimensión Infinita?

Definición: Un marco es un conjunto de vectores $\{r_n\}$ tq.

$$A \|v\|^2 \leq \sum |\langle r_n, v \rangle|^2 \leq B \|v\|^2 \quad \forall v \in H$$

$0 < A, B$ son **cotas del marco**

Si $A = B$, el marco se llama **justo**.

¿ Cómo recuperar v de $\{ \langle r_n, v \rangle \}_{n \in \Gamma}$?

- Las cotas del marco hacen de $T^* T$ y de $(T^* T)^{-1}$ operadores acotados.

$$\langle v, T^* T v \rangle = \langle T v, T v \rangle = \sum |\langle r_n, v \rangle|^2$$

$$A \|v\|^2 \leq \langle v, T^* T v \rangle \leq B \|v\|^2 \quad \forall v \in H$$

$T^* T$ está acotado por B y
su inversa está acotada por $1/A$

B/A es la tasa del marco

A y B aseguran que v pueda ser
recuperado de manera **estable**.

Marcos

Teoría de Marcos analiza \Rightarrow completitud
 \Leftrightarrow estabilidad
 \Leftrightarrow redundancia
de representaciones lineales de señales discretas

f señal

Marco: $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ caracteriza $f \rightarrow \{\langle f, \phi_n \rangle\}_{n \in \Gamma}$

Aplicación: reconstrucción de señales a partir de muestreos regularres o irregulares.

Teoría de Marcos (TM)

TM desarrollada por Duffin y Schaeffer (1952) para reconstruir $\{f(t_n)\}$ con $\{t_n\}$ un muestreo irregular.

\mathbf{H} espacio de Hilbert; $f \in \mathbf{H}$

$\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$, Γ finito o infinito, $\{\langle f, \phi_n \rangle\}_{n \in \Gamma}$

Definición: La sucesión $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ se dice un **marco de \mathbf{H}** si existen dos constantes $A > 0$ y $B > 0$, tales que para cualquier $f \in \mathbf{H}$

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2.$$

Cuando $A=B$, se dice que el **marco** es **justo** (tight frame).

Operador *Marco*

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2. \quad (1)$$

U: operador / $\forall f \in \mathbf{H}, \forall n \in \Gamma$, $Uf[n] = \langle f, \phi_n \rangle$.

Si la condición de marco (1) se satisface,

U se dice un **Operador Marco**.

Marcos Propiedades (I)

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2. \quad (1)$$

Veremos que:

- (1) da condición necesaria y suficiente para garantizar que U sea inversible, con inversa acotada.
- Un marco define una representación **completa** y **estable** de la señal, que puede ser también **redundante**.
- Si $\|\phi_n\| = 1$ la redundancia se mide con A y B

Marcos – Propiedades (cont)

- Si $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ son linealmente independientes, $A \leq 1 \leq B$.

$$A \|\phi_m\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle \phi_m, \phi_n \rangle|^2 \leq B \|\phi_m\|^2.$$

$$A \|\phi_m\|^2 \leq |\langle \phi_m, \phi_m \rangle|^2 \leq B \|\phi_m\|^2.$$

- Un marco es una base ortogonal si y sólo si $A = B = 1$.

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2.$$

$$\sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 = \|f\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad A = B = 1$$

Si $A > 1$, entonces el marco es redundante y A se interpreta como el menor factor de redundancia.

Ejemplo 1

$\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de un espacio bidimensional (“plano”) \mathbf{H} .

$$\phi_1 = e_1 \quad , \quad \phi_2 = -\frac{e_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 \quad , \quad \phi_3 = -\frac{e_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$$

tienen iguales ángulos entre ellos $= 2\pi/3$

$$f \in \mathbf{H} \quad , \quad \sum_{n=1}^3 |\langle f, \phi_n \rangle|^2 = \frac{3}{2} \|f\|^2$$

ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 definen un marco justo con $A=B=3/2$.

La cota del marco $3/2$ define su redundancia en $\mathbf{H} / \dim(\mathbf{H})=2$.

Ejemplo 2

Para $0 \leq k \leq K$, $\{e_{k,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ bases ortogonormales de \mathbf{H}

$\{e_{k,n}\}_{n \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq K}$ es una marco justo de \mathbf{H} con $A=B=K$

$$f \in \mathbf{H}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_{k,n} \rangle|^2 = \|f\|^2$$

$$\sum_{k=0}^K \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_{k,n} \rangle|^2 = K \|f\|^2$$

Ejemplo 3

Un conjunto finito de N vectores $\{\phi_n\}_{1 \leq n \leq N}$ es siempre un marco de

$$V = \text{gen}\{\{\phi_n\}_{1 \leq n \leq N}\}$$

Ejercicio

Cuando $N \rightarrow \infty$, A y B pueden ir respectivamente a 0 y a $+\infty$.

En espacios de dimensión infinita, una familia de vectores puede ser *completa*, pero no dar una representación *estable* de la señal

Muestreo Regular

$$\mathbf{U}_T = \left\{ f \in L^2(\mathfrak{R}) \quad / \quad \text{sup}[\hat{f}] \subset [-\pi/T, \pi/T] \right\}$$

$$h_T(t) = \sin(\pi t/T) / (\pi t/T)$$

Para $t_n = nT$ (muestreo uniforme),

$$\{T^{-1/2} h_T(t-nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

es base ortonormal de \mathbf{U}_T

Teorema de muestreo de Shannon \Leftrightarrow reconstrucción de f

Muestreo Irregular

Para muestreo NO uniforme (Grochening, 1992)

$$\text{Si } \lim_{t \rightarrow +\infty} t_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} t_n = -\infty$$

$$\text{y } \delta = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |t_{n+1} - t_n| < T \quad : \text{Máxima distancia muestral}$$

$$\Rightarrow \left\{ \sqrt{\frac{t_{n+1} - t_{n-1}}{2T}} h_T (t - t_n) \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{es un marco con:}$$

$$A \geq (1 - \delta/T)^2 \quad \text{y} \quad B \leq (1 + \delta/T)^2.$$

$$\sqrt{t_{n+1} - t_{n-1}}/2$$

Factor de amplitud, compensa la densidad no-uniforme de las muestras:

atenúa la amplitud de los vectores cuando hay una alta densidad de muestras.

Reconstrucción: inversión del Op. Marco: $Uf[n] = \langle f(t), h_T(t - t_n) \rangle$

Complemento Ortogonal (Alg. Lineal)

- H espacio de Hilbert

W subespacio de H

$$W^\perp = \{h \in H / \langle h, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}$$

W^\perp es complemento ortogonal de W en H:

- H es la suma directa de W y W^\perp

$$H = W \oplus W^\perp$$

Pseudo Inversa

La **reconstrucción** de f a partir de los coeficientes marco $Uf[n]$ se calcula con una **pseudo- inversa**.

Es un operador acotado que se expresa con el **marco dual**.

$$l^2(\Gamma) = \left\{ x : \|x\|^2 = \sum_{n \in \Gamma} |x(n)|^2 < +\infty \right\}$$

$$U : \mathbf{H} \rightarrow l^2(\Gamma)$$

$$\mathbf{Im}U = \mathbf{Im}\{Uf, \quad f \in \mathbf{H}\}$$

Pseudo Inversa (Teorema)

Teorema: Si $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ es un marco cuyos vectores son linealmente dependientes, entonces:

- $\mathbf{Im}U$ está estrictamente contenida en $l^2(\Gamma)$
- U admite un número infinito de inversas izquierdas \bar{U}^{-1}
$$\forall f \in \mathbf{H} \quad , \quad \bar{U}^{-1} U f = f.$$

Teorema (dem 1.)

H) $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$: marco de H, vectores l.d

Tesis: 1) $\text{Im}U \subset l^2(\Gamma)$ y **son distintos**

2) $\exists n$ infinitas $U^{-1} / \forall f \in \mathbf{H}, \bar{U}^{-1} U f = f$.

Dem 1:

$$U : \mathbf{H} \rightarrow l^2(\Gamma) / Uf[n] = \langle f, \phi_n \rangle$$

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2. \quad \Rightarrow \quad \|Uf\|^2 = \sum_{n \in \Gamma} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2.$$

$$f \in H \subset L^2 \Rightarrow \|Uf\|^2 < +\infty$$

$$\text{Im}(U) \subset l^2(\Gamma)$$

Teorema (dem.)

H) $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$: marco de H, vectores l.d

Tesis: 1) $\text{Im}U \subset l^2(\Gamma)$ **y es distinto de $l^2(\Gamma)$**

2) $\exists n$ infinitas $U^{-1} / \forall f \in \mathbf{H}, \bar{U}^{-1} U f = f$.

Dem. 1 (cont):

$$\{\phi_n\}_{n \in \Gamma} \text{ es ld} \Rightarrow \exists x \neq 0, x \in l^2(\Gamma) / \sum_{n \in \Gamma} x[n] \phi_n = 0$$

$$\forall f \in \mathbf{H}, \sum_{n \in \Gamma} x[n] \langle f, \phi_n \rangle = \sum_{n \in \Gamma} x[n] Uf[n] = 0$$

$$\Rightarrow \text{Im}U \text{ es ortogonal a } x \Rightarrow \text{Im}U \neq l^2(\Gamma).$$

Teorema (dem. 2)

$$U : \mathbf{H} \rightarrow l^2(\Gamma) / Uf[n] = \langle f, \phi_n \rangle$$

2) ¿ U admite un número infinito de inversas izquierdas $\bar{U}^{-1} /$

$$\forall f \in \mathbf{H} \quad , \quad \bar{U}^{-1} U f = f \quad ?$$

U es marco \Rightarrow U es inyectivo (1a1) : ($Uf = 0 \Rightarrow f = 0$)

$U : H \rightarrow \mathbf{Im}U$ es inversible

Sea $\mathbf{Im}U^\perp / \mathbf{Im}U^\perp \oplus \mathbf{Im}U = l^2(\Gamma)$

el **Complemento Ortogonal** de $\mathbf{Im}U$

Si $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ es l.d. $\Rightarrow \mathbf{Im}U^\perp \neq \{0\}$

$\bar{U}^{-1} : \mathbf{Im}U^\perp \rightarrow H$ puede ser un operador lineal arbitrario.

La pseudo inversa de U

- Se define como la inversa izquierda de U que satisface:

$$\tilde{U}^{-1} : l^2(\Gamma) \rightarrow H /$$

i) $\tilde{U}^{-1}Uf = f, \forall f \in H$

ii) $\tilde{U}^{-1}x = 0, \forall x \in (\text{Im } U)^\perp$

Si $\dim(H)$ es infinito y U es inyectivo, entonces su pseudoinversa no es necesariamente acotada

De la Pseudo Inversa

- Cuanto más redundante sea el marco $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$, mayor será el complemento ortogonal $\mathbf{Im}U^\perp$.
- Esto induce inestabilidades numéricas al tratar de reconstruir f a partir de Uf .

Notación:

El **adjunto del operador U** es U^* / $\langle Uf, x \rangle = \langle f, U^* x \rangle$

$$\|\tilde{U}^{-1}\|_S = \sup_{x \in l^2(\Gamma) - \{0\}} \frac{\|\tilde{U}^{-1}x\|}{\|x\|}.$$

Norma del Supremo

Teorema (de la Pseudo-Inversa)

La pseudo-inversa satisface

$$\tilde{U}^{-1} = (U^*U)^{-1}U^*$$

Es la inversa izquierda que tiene menor norma del supremo.

Si U es un operador marco con cotas A y B entonces

$$\|\tilde{U}^{-1}\|_s \leq \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Entonces:

- un operador marco tiene siempre pseudo-inversa
- la pseudo-inversa está siempre acotada.

Operador Autoadjunto

$T:H \rightarrow H$ autoadjunto \Leftrightarrow

$$\langle Tf, f \rangle = \langle f, T^* f \rangle \quad \text{y} \quad T = T^*$$

Lema:

Si L es un operador auto-adjunto tal que existen $A > 0$ y B que satisfacen

$$\forall f \in H \quad , \quad A \|f\|^2 \leq \langle Lf, f \rangle \leq B \|f\|^2$$

entonces L es inversible y

$$\forall f \in H \quad , \quad \frac{1}{B} \|f\|^2 \leq \langle L^{-1} f, f \rangle \leq \frac{1}{A} \|f\|^2$$

Teorema:

El Marco Dual

Sea $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ un marco con cotas A y B.

El **marco dual** definido por

$$\tilde{\phi}_n = (U^*U)^{-1} \phi_n$$

satisface

$$\forall f \in H \quad , \quad \frac{1}{B} \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \tilde{\phi}_n \rangle \phi_n \leq \frac{1}{A} \|f\|^2$$

$$f = \tilde{U}^{-1} U f = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \tilde{\phi}_n \rangle \phi_n$$

Si es un marco ajustado, i.e. si $A=B$, entonces

$$\tilde{\phi}_n = A^{-1} \phi_n$$

Fórmula de reconstrucción

$$f = \frac{1}{A} \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$

Reconstrucción Parcial

Sea $\{\phi_n\}_{n \in \Gamma}$ un marco de un subespacio \mathbf{V} de todo el espacio de señales.

$$Uf[n] = \langle f, \phi_n \rangle$$

dan información parcial de f que no es suficiente para recuperarla completamente.

La mejor aproximación (cuadrática- media) son las proyecciones ortogonales de f en \mathbf{V}

$P_{\mathbf{V}}f$ se calcula con los marcos duales de ϕ_n

$$P_{\mathbf{V}} f = \tilde{U}^{-1} U f = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n$$

Marco dual

¿ $P_{\mathbf{V}}$ es la Proyección ortogonal en \mathbf{V} ?

- ¿ $P_{\mathbf{V}} f \in \mathbf{V}$?
- ¿ $\langle f - P_{\mathbf{V}} f, \phi_p \rangle = 0 \quad \forall p \in \Gamma$?

$$\begin{aligned} \langle f - P_{\mathbf{V}} f, \phi_p \rangle &= \langle f, \phi_p \rangle - \langle P_{\mathbf{V}} f, \phi_p \rangle \\ &= \langle f, \phi_p \rangle - \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \langle \tilde{\phi}_n, \phi_p \rangle, \end{aligned}$$

Por la propiedad de marco dual: $\sum_{n \in \Gamma} \langle \tilde{\phi}_n, \phi_p \rangle \phi_n = \phi_p$

$$\langle f - P_{\mathbf{V}} f, \phi_p \rangle = 0 \quad \forall p \in \Gamma$$

Si se tiene un número finito de datos

$$\{\langle f, \phi_n \rangle\}_{0 \leq n < N}$$

Como la familia $\{\phi_n\}_{0 \leq n < N}$ es necesariamente un marco del espacio \mathbf{V} que genera,

la fórmula de reconstrucción

$$P_{\mathbf{V}} f = \tilde{U}^{-1} U f = \sum_{n \in \Gamma} \langle f, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n .$$

da la mejor aproximación de f .

Proyección Marco y reducción de ruido

La redundancia del marco es útil para reducir el ruido agregado a los coeficientes marco.

El vector calculado con coeficientes ruido marco es proyectada en la **ImU** para reducir la amplitud del ruido.

Esta técnica es utilizada para convesión de alta precisión analógica a digital basada en sobremuestreo.

Marcos con Ventanas de Fourier

La teoría de marcos da condiciones para discretizar Transformada de Fourier por Ventanas.

$$Sf(u, \xi) = \langle f, g_{u, \xi} \rangle \quad g_{u, \xi} = g(t - u) \exp(i \xi t)$$

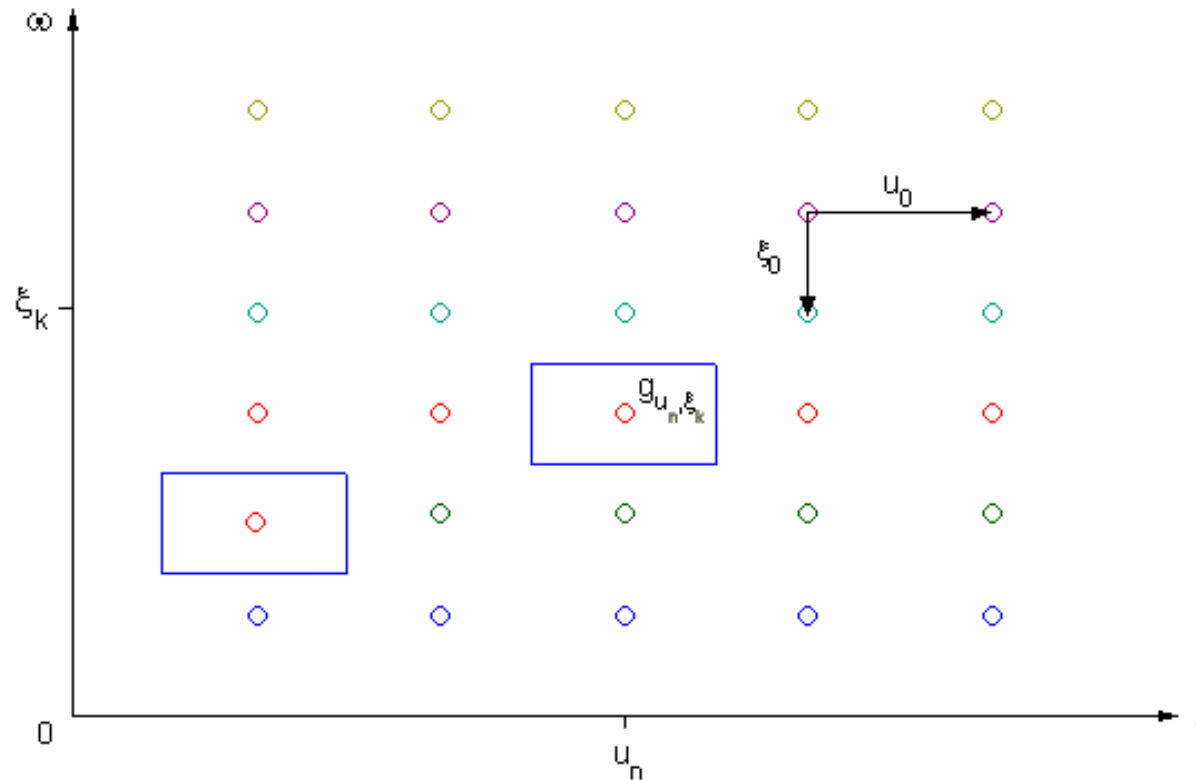
$$\|g\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \|g_{u, \xi}\| = 1$$

$$\left\{ Sf(u_n, \xi_k) = \langle f, g_{u_n, \xi_k} \rangle \right\}_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$$

Representación Discreta de S

Es completa si $\left\{ g_{u_n, \xi_k} \right\}_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$ es un marco de $L^2(\mathbb{R})$

Discretización del plano Tiempo-Frecuencia



u_0 : long del intervalo temporal
 ξ_0 : long. del intervalo frecuencia
 $u_n = n u_0$; $\xi_k = k \xi_0$

Marco con ventanas Fourier

$$g_{n,k}(t) = g(t - nu_0) \exp(ik \xi_0 t)$$

El intervalo de muestreo (u_0, ξ_0) se ajusta con la dispersión temporal de g .

$\{g_{n,k}\}_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$ es un marco en $L^2(\mathbb{R})$, con cotas A y B.

Ventanas dilatadas: $g_s(t) = s^{-1/2} g(t/s)$

Se obtiene el mismo cubrimiento del Plano T-Fr aumentando u_0 con s y reduciendo la frecuencia ξ_0 con s .

Marco con ventanas Fourier y escalamiento temporal

$$g_{s,n,k}(t) = g_s(t - n s u_0) \exp(i k \frac{\xi_0}{s} t)$$

$\{g_{s,n,k}\}_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$ satisface la misma desigualdad de marco que $\{g_{n,k}\}_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$ con iguales cotas A y B con un cambio de variables $t' = t s$ en los productos internos.

Condiciones Necesarias

Teorema (Daubechies): La familia de ventanas de Fourier

$\{g_{n,k}\}_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$ es un marco sí y sólo si

$$\frac{2\pi}{u_0 \xi_0} \geq 1$$

mide la densidad de los átomos

Las cotas del marco A y B necesariamente satisfacen

$$A \leq \frac{2\pi}{u_0 \xi_0} \leq B,$$

Traslaciones temporales uniformes de g cubren el eje temporal

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A \leq \frac{2\pi}{\xi_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g(t - n u_0)|^2 \leq B,$$

Traslaciones en frecuencia uniformes de \hat{g} cubren el eje de frecuencias

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad A \leq \frac{2\pi}{u_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\omega - k \xi_0)|^2 \leq B,$$

Condiciones Necesarias (cont.)

$\|g_{u,\xi}\| = 1 \Rightarrow$ el marco es Base Ortogonal $\Leftrightarrow A = B = 1$

$A \leq \frac{2\pi}{u_0 \xi_0} \leq B \Rightarrow$ sólo es posible para la densidad crítica

$$2\pi = u_0 \xi_0$$

En ese caso, g puede ser no suave o bien tener decaimiento temporal lento (Teorema de Balian-Low)

i.e

No se puede construir una base de Fourier por ventanas ortogonales con una ventana g diferenciable de soporte compacto

$$g = \frac{1}{\sqrt{u_0}} \chi_{[-u_0/2, u_0/2]}$$

Da bases ortogonales de Fourier por ventanas para $2\pi = u_0 \xi_0$

Daubechies (1990) → Condiciones Suficientes para construir marcos Fourier por ventanas.

Marcos Duales

Los marcos duales de los vectores marco por ventanas son también marcos Fourier por ventanas

i.e.

traslaciones en tiempo y frecuencia de una nueva ventana \tilde{g}

$$\tilde{g}_{n,k} = (U^* U)^{-1} g_{n,k}$$

$$\tilde{g}_{n,k}(t) = \tilde{g}(t - n u_0) \exp(i k \xi_0 t)$$

Marcos Ondita

Los marcos ondita son construidos por muestreo de los parámetros tiempo y escala de la CWT.

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt$$

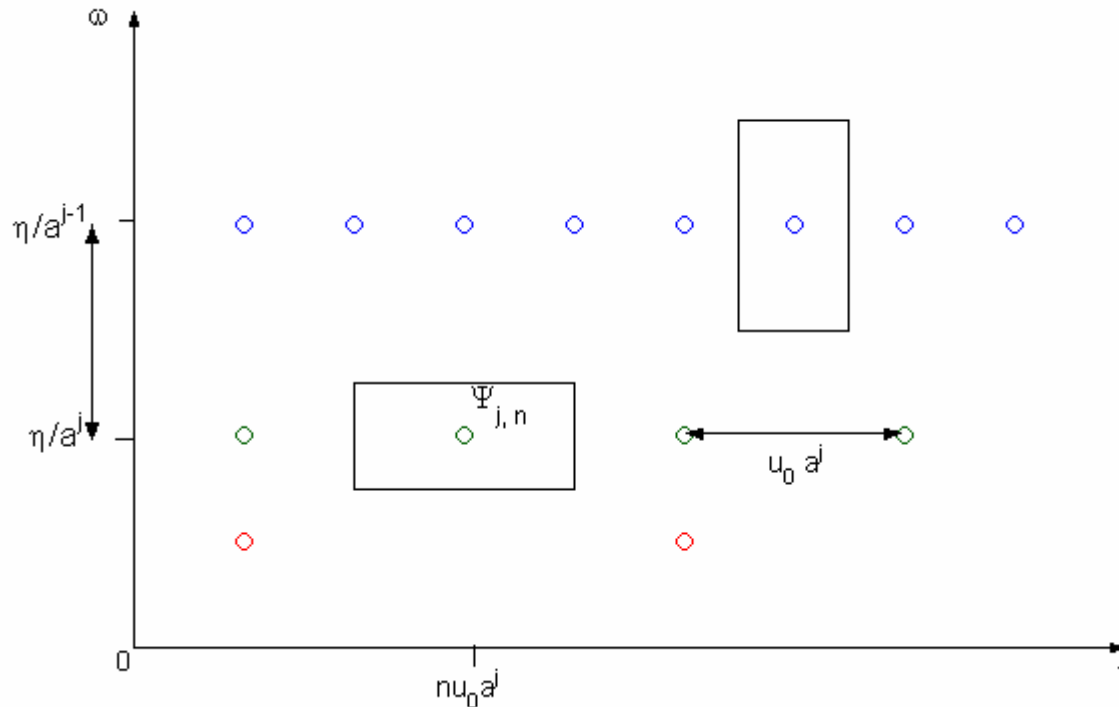
$$\psi_{u,s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) \quad \|\psi\| = 1 \Rightarrow \|\psi_{u,s}\| = 1$$

$s = a^j$, paso de dilatación $a > 1$ suficientemente pequeño

$$u = u_0 a^j$$

$$\psi_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi \left(\frac{t - n u_0 a^j}{a^j} \right)$$

Marcos Ondita: Tiempo frecuencia



¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes sobre ψ , a y u_0 para que $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$ sea marco de $L^2(\mathbb{R})$?

Marcos Ondita: Condiciones Necesarias

ψ real, normalizada y satisface la **condición de admisibilidad**:

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty$$

Teorema (Daubechies): Si $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$ es un marco de $L^2(\mathbb{R})$, entonces sus cotas satisfacen:

Densidad de muestreo

$$A \leq \frac{C_\psi}{u_0 \log_e a} \leq B$$

El marco es base ortonormal sii $A=B=1$

$$\forall \omega \in \mathbb{R} - \{0\} \quad , \quad A \leq \frac{1}{u_0} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left| \hat{\psi}(a^j \omega) \right|^2 \leq B$$

Garantiza que el eje de las frecuencias es cubierto por las onditas dilatadas

Marcos Ondita: Condiciones Suficientes

Daubechies (1992) en

“Ten lectures on Wavelets”

da cotas superiores e inferiores sobre las cotas A y B,

dependientes de ψ , u_0 y a ,

las que son condiciones suficientes para que $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$

sea un marco ondita de $L^2(\mathbb{R})$.

Marcos Duales Ondita

Vectores marco Ondita Dual

$$\tilde{\psi}_{j,n} = (U^* U)^{-1} \psi_{j,n}$$

¿ Las onditas duales $\tilde{\psi}_{j,n}$ pueden obtenerse por dilataciones de escala y traslaciones de la ondita dual $\tilde{\psi}$?

☹ En general esto no es cierto!!! ☹

• ☹ El operador U^*U en general no conmuta con dilataciones por $a^j \Rightarrow (U^*U)^{-1}$ tampoco lo hace.

• ☺ Pero si conmuta con traslaciones $n a^j u_0$!!!

$$\tilde{\psi}_{j,n}(t) = \tilde{\psi}_{j,0}(t - n a^j u_0)$$

Marcos Duales Ondita

$$\{\tilde{\psi}_{j,n}\}_{n,j \in \mathbb{Z}}$$

se obtiene calculando cada función

elemental

$$\tilde{\psi}_{j,0}$$

con

$$\tilde{\psi}_{j,n} = (U^* U)^{-1} \psi_{j,n}$$

y trasladando con

$$\tilde{\psi}_{j,n}(t) = \tilde{\psi}_{j,0}(t - n a^j u_0)$$

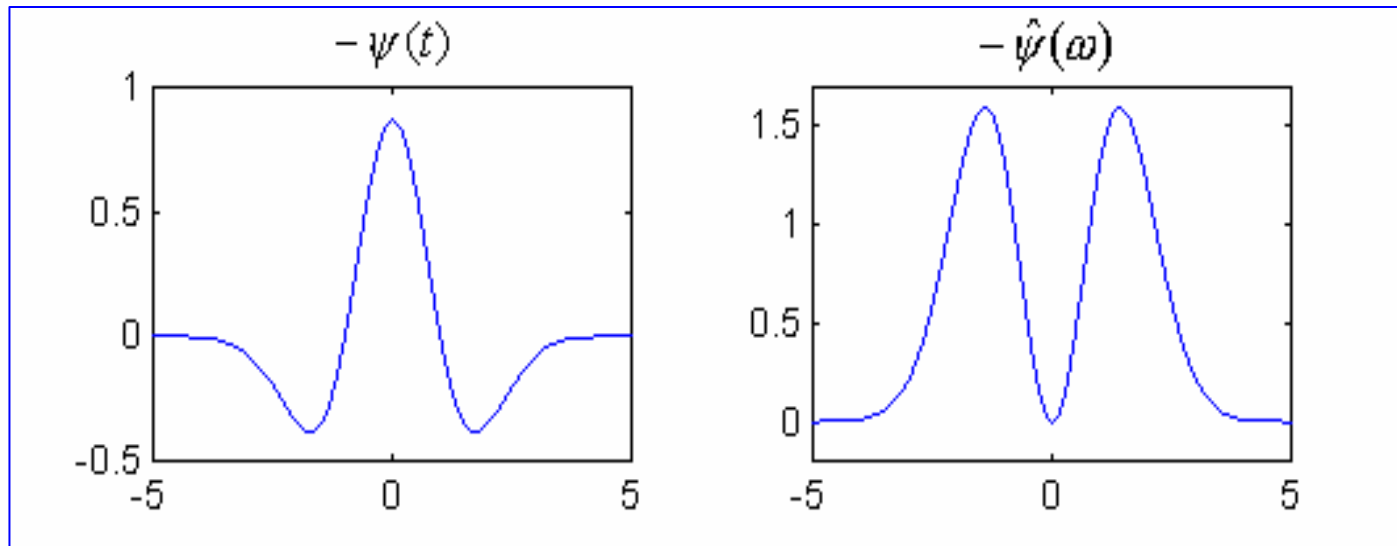
Para marcos justos :

el marco dual es igual al marco ondita original

Ejemplo: Ondita Sombrero Mejicano

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (t^2 - 1) \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$$

$$\hat{\psi}(\omega) = -\frac{\sqrt{8} \pi^{1/4} \omega^2}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{-\omega^2}{2}\right)$$



Aproximación del marco dual

(I. Daubechies , “Ten lectures on Wavelets” , 1992)

- Con $a = 2^{1/\nu}$, $\nu > 2$ voces por escala, el marco es casi justo cuando $u_0 \leq 0.5$.



El marco dual puede aproximarse por el marco ondita.

Cuando $A \approx B$:

$$A \approx B \approx \frac{C_\psi}{u_0 \log_e a} = \frac{\nu}{u_0} C_\psi \log_2 e$$

$$a = 2^{1/\nu}$$

A y B aumentan proporcionalmente a ν / u_0

Invariancia por Traslaciones

Transformaciones Continuas

$$f_{\tau}(t) = f(t - \tau)$$

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt = f * \bar{\psi}_s(u) \quad ,$$

$$\text{con } \bar{\psi}_s(t) = s^{-1/2} \psi(-t/s).$$

$$Wf_{\tau}(u, s) = f_{\tau} * \bar{\psi}_s(u) = Wf(u - \tau, s)$$

CWT es invariante por traslaciones

Invarianza de WFT

$$f_{\tau}(t) = f(t - \tau)$$

$$Sf(u, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t - u) e^{-it\xi} dt = e^{-iu\xi} f * \bar{g}_{\xi}(u)$$

$$\text{con } \bar{g}_{\xi}(t) = g(-t) \exp(i\xi t)$$

$$Sf_{\tau}(u, \xi) = e^{-iu\xi} f * \bar{g}_{\xi}(u - \tau) = e^{-i\tau\xi} Sf(u, \xi)$$

WFT es invariante por traslaciones
salvo un desplazamiento en la fase.

Muestreo Marco Ondita

$$\psi_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi\left(\frac{t - n u_0 a^j}{a^j}\right)$$

Marco Ondita

$$\langle f, \psi_{j,n} \rangle = f * \bar{\psi}_{a^j}(n u_0 a^j) = Wf(n u_0 a^j, a^j)$$

Realiza productos internos que muestrean la transformada ondita continua en intervalos $u_0 a^j$.

$$\langle f_\tau, \psi_{j,n} \rangle = f * \bar{\psi}_{a^j}(n u_0 a^j - \tau) = Wf(n u_0 a^j - \tau, a^j)$$

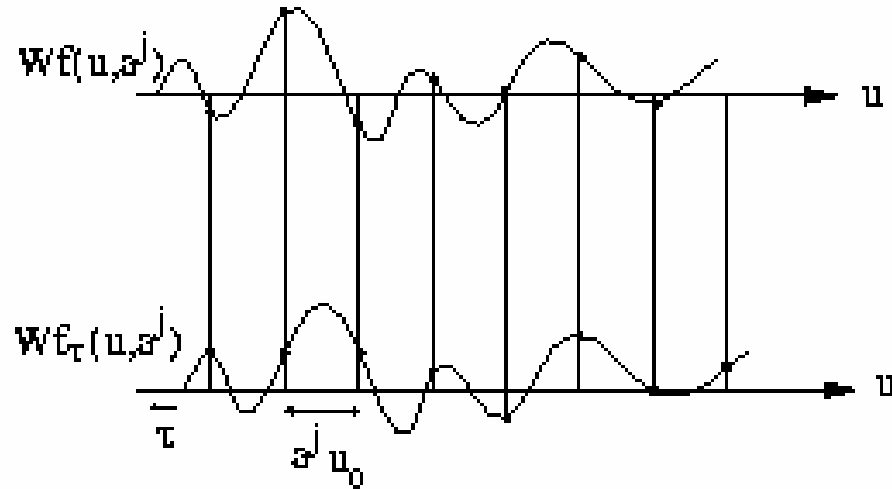
Intervalo de muestreo

No hay invariancia



Fenómeno de distorsión en las onditas de bases ortogonales.

Muestreo Marco



si $\tau \neq k u_0 a^j$

$Wf_\tau(u, a^j) \neq Wf(u, a^j)$, en $u = n a^j u_0$

Transformada Ondita Diádica - Cuasicontinua

- la escala $s=2^j$.
- el parámetro de traslación u no se discretiza.

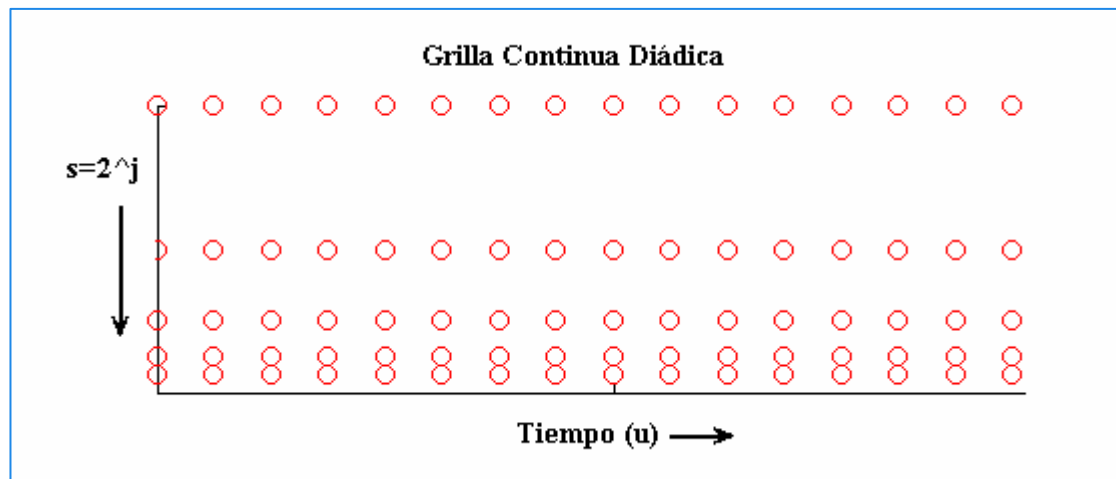


Representación ondita invariante en el tiempo.

$$Wf(u, 2^j) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{2^j} \psi\left(\frac{t-u}{2^j}\right) dt = f * \bar{\psi}_{2^j}(u)$$

con
$$\bar{\psi}_{2^j}(t) = \psi_{2^j}(-t) = \frac{1}{2^j} \psi\left(\frac{-t}{2^j}\right)$$

Grilla Diádica - Cuasicontinua



Teorema:

Si existen dos constantes $A > 0$ y $B > 0$ tales que

$$\forall \omega \in \mathfrak{R} - \{0\} \quad , \quad A \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left| \hat{\psi}(2^j \omega) \right|^2 \leq B,$$

entonces

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \left\| Wf(u, 2^j) \right\|^2 \leq B \|f\|^2$$

Y si

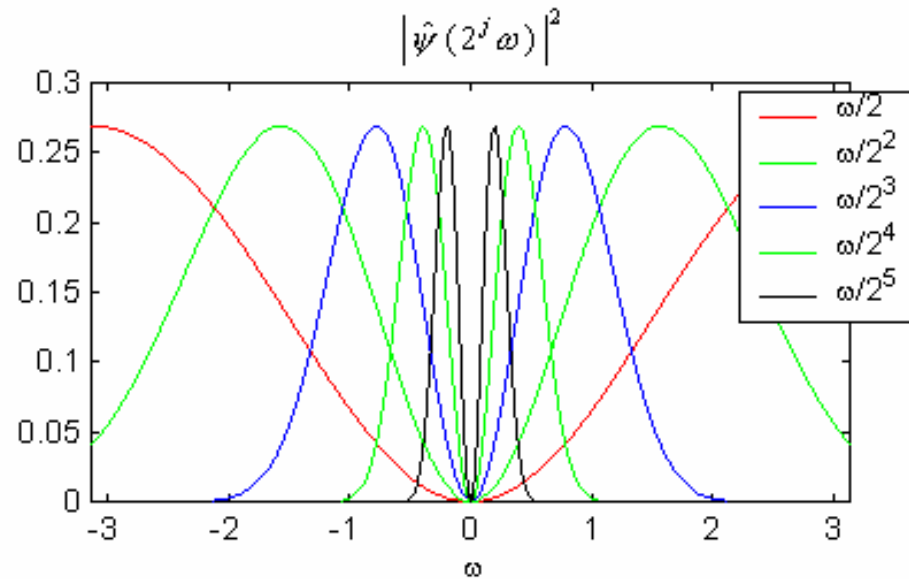
$$\forall \omega \in \mathfrak{R} - \{0\} \quad , \quad \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}^*(2^j \omega) \hat{\psi}(2^j \omega) = 1$$

entonces

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^j} Wf(\cdot, 2^j) * \tilde{\psi}_{2^j}(t).$$

Interpretación

Si el eje de frecuencias es cubierto completamente por onditas diádicas dilatadas



entonces la $Wf(u, 2^j)$ define una representación estable y completa.

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \|Wf(u, 2^j)\|^2 \leq B \|f\|^2$$



$$Uf[j, u] = \frac{1}{2^j} Wf(u, 2^j) = \left\langle f, \frac{1}{2^j} \psi_{2^j}(t - u) \right\rangle$$

Operador Transformada
Ondita Diádica Normalizado

Satisface la condición de marco



Existe una infinidad de onditas de reconstrucción,
que corresponden a
diferentes inversas izquierdas de U

Si $\hat{\psi}(\omega) = \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(2^j \omega)|^2}$, la inversa izquierda es la pseudo inversa \tilde{U}^{-1} .

Transformada Ondita Diádica

FWT_ATrou -- Fast Dyadic Wavelet Transform (periodized, orthogonal)

Usage

```
dwt = FWT_ATrou(x,L)
```

Inputs

x 1-d signal; $\text{length}(x) = 2^J = n$

L Coarsest Level of V_0 ; $L \ll J$

Outputs

dwt an n times $J-L+1$ matrix

giving the wavelet transform of x at all dyadic scales.

Description

To reconstruct use `IWT_ATrou`

```
s='mysignal';  
L = 2; %3;  
dwt = FWT_ATrou(s,L);  
  
figure(1);clf  
DisplayDWT(dwt,4,s);  
figure  
DisplayDWT(dwt,5,s);
```

Ondita Spline Cuadrática

$$\beta_0(t) = \chi_{[0,1]}(t)$$

Spline de orden cero

$$\beta_1(t) = \beta_0 * \beta_0(t) = \beta_0^2(t)$$

Spline de 1^{er} orden

$$\beta_2(t) = \beta_1 * \beta_0(t) = \beta_0^3(t)$$

Spline de 2^{do} orden

$$\phi(t) = \beta_m(t) = \beta_0^{m+1}(t)$$

$$\text{centrada en } t = \begin{cases} 1/2 & \text{si } m \text{ es par} \\ 0 & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^{m+1} \exp\left(\frac{-i\varepsilon\omega}{2} \right), \text{ con } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es par} \\ 0 & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

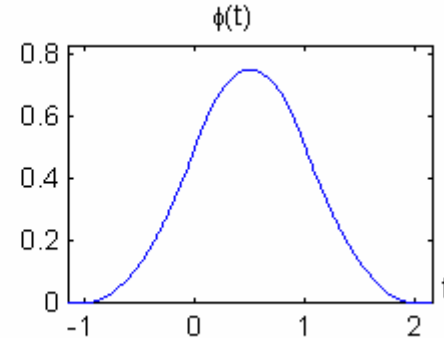
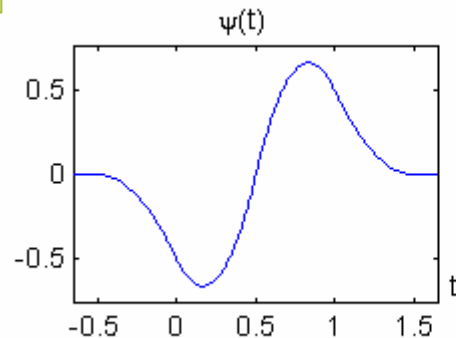
Ondita Spline Cuadrática

$$\hat{g}(t) = -i\sqrt{2} \sin \frac{\omega}{2} \exp\left(-\frac{i\varepsilon\omega}{2}\right)$$

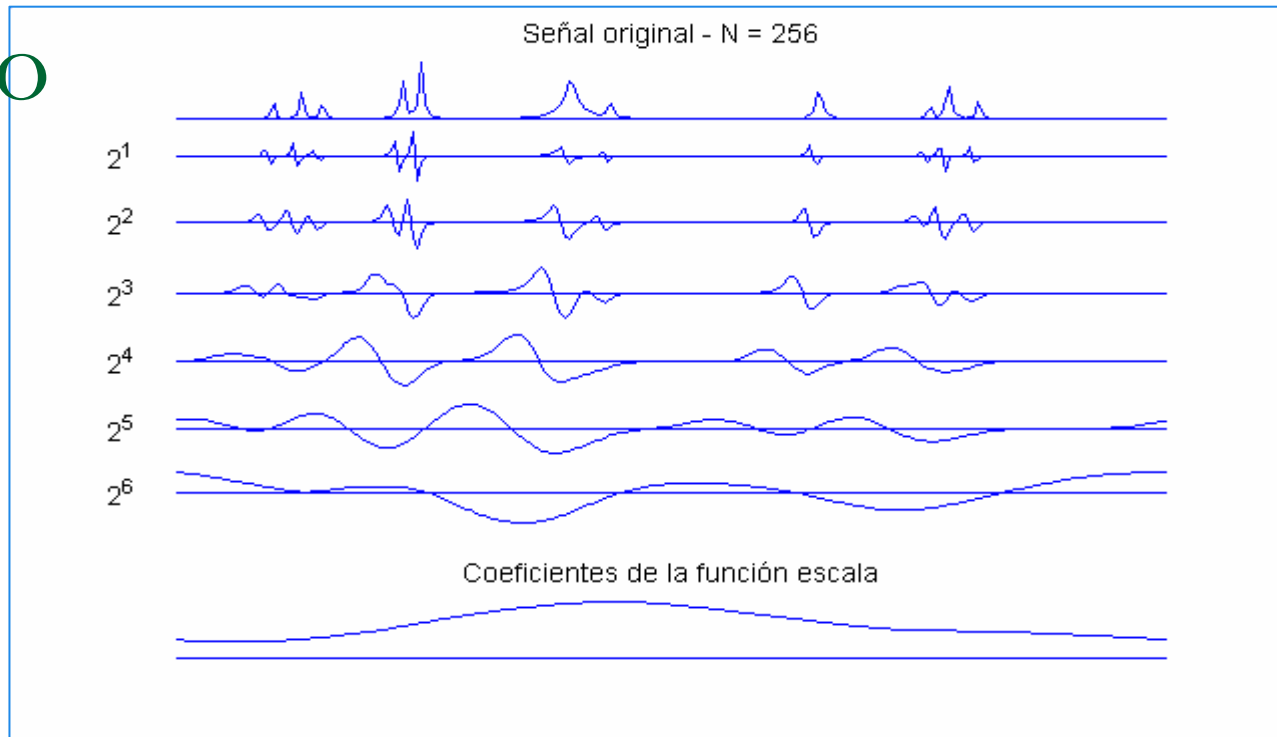
$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\frac{i\omega}{4} \left(\frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4}\right)^{m+2} \exp\left(-\frac{i\omega(1+\varepsilon)}{4}\right)$$

Ondita spline

$m = 2$



Demo



s Señal Original;

$\text{length}(s) = 2^J = N = 256;$

$J=8; N=256;$

L Nivel más tosco de V_0 ; $L \ll J;$

$L=2;$

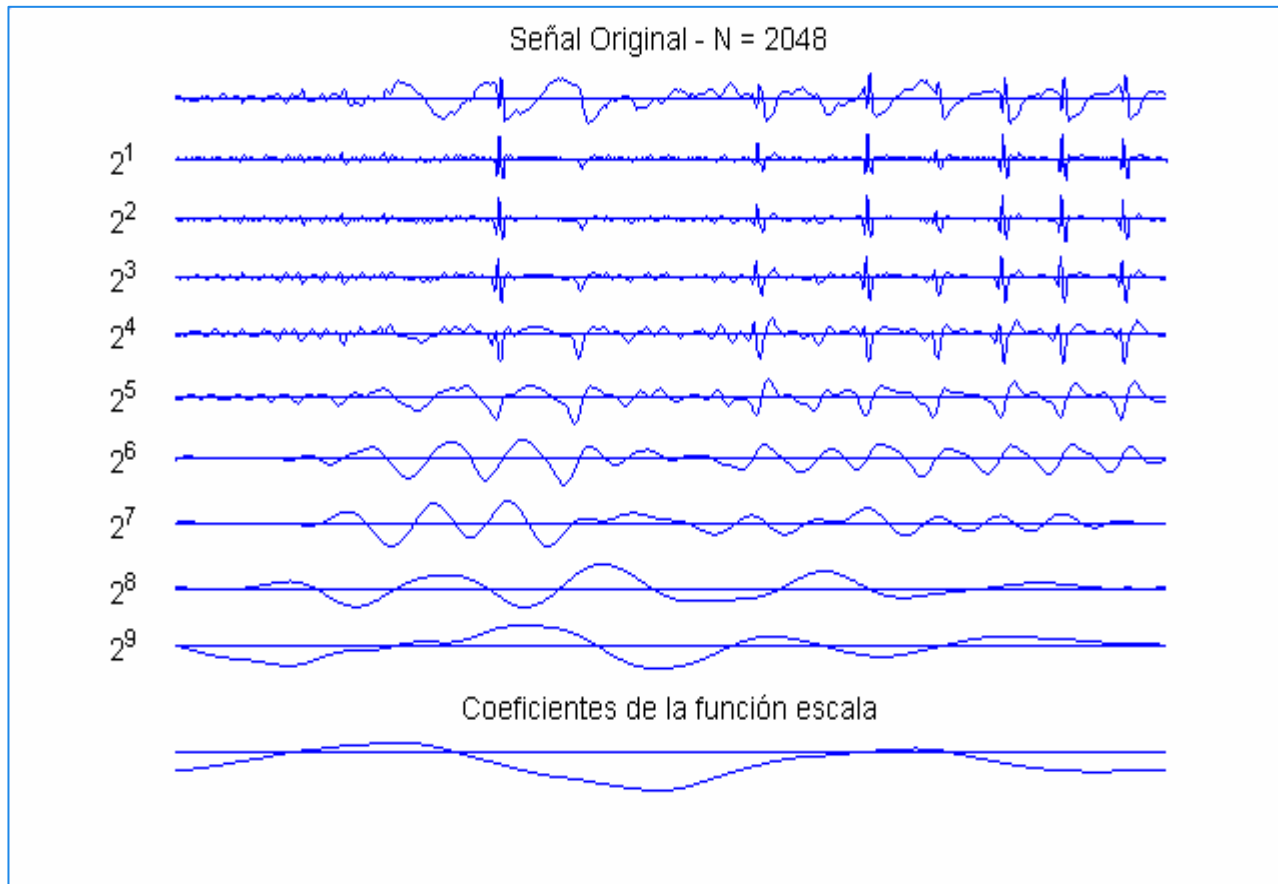
Outputs

dwt matriz de $N \times J-L+1$

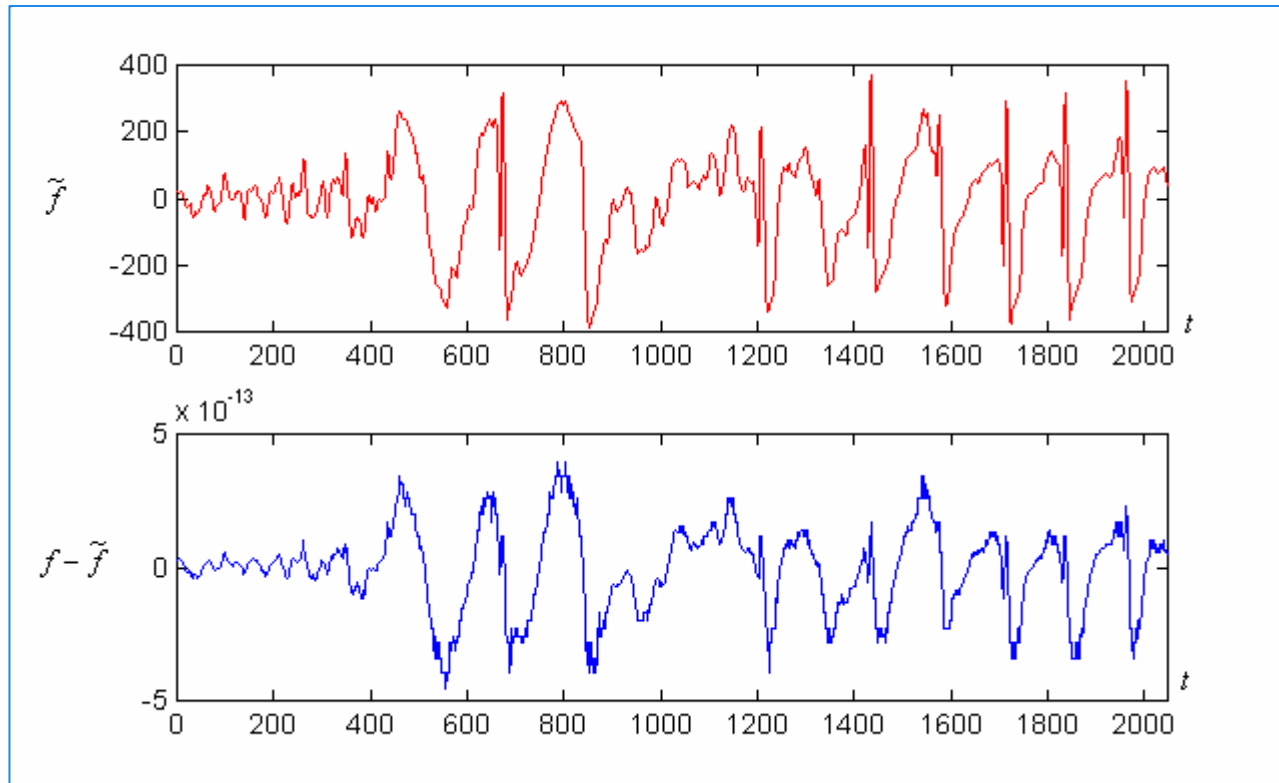
$256 \times (8-2+1) = 256 \times 7$

El primer renglón $\text{dwt}(:,1)$ corresponde
a los coeficientes de escala

EEG - Descomposición Diádica



EEG - Reconstrucción Diádica



```
figure;  
subplot(211)  
si = IWT_ATrou(dwt,L);  
plot(1:length(si),si,'b',1:length(s),s,'r');  
subplot(212)  
plot(1:length(si),si-s');
```