Transformada Ondita. Teoría y Aplicaciones

(Clase 4)

Dra. María Eugenia Torres

Universidad Nacional de Entre Ríos
Facultad de Ingeniería
Laboratorio de Señales y Dinámicas no Lineales

metorres@ceride.gov.ar

Contenidos

- **Introducción**
  Elementos de Matemáticas avanzadas. Operadores lineales. Proyecciones. Espacios vectoriales. Filtros lineales invariantes en el tiempo. Integrales de Fourier en L1 y en L2. Propiedades. Filtros lineales discretos invariantes en el tiempo. Señales finitas.
- **Análisis tiempo-frecuencia**
  La transformada Fourier por ventanas. La transformada ondita. Frecuencia instantánea. Energía tiempo-frecuencia instantánea.
- **Marcos**
  Teoría de Marcos. Marcos en Fourier y en onditas. Invariancia ante traslación. Transformada Ondita Diádica.
- **Bases Ondita**.
  Bases onditas ortogonales. Aproximaciones Multirresolución. Funciones escala. Filtros espejo conjugados. Clases de bases ondita. Onditas y bancos de filtros. Bases biortogonales.
- **Aplicaciones.**

Señal analítica

$$s(t)$$ señal real

$$z_s(t) = s(t) + i\,\boxed{H\{s(t)\}} = s(t) + i\,\boxed{\frac{1}{2\pi}\, vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(u)}{t-u}\,du}$$

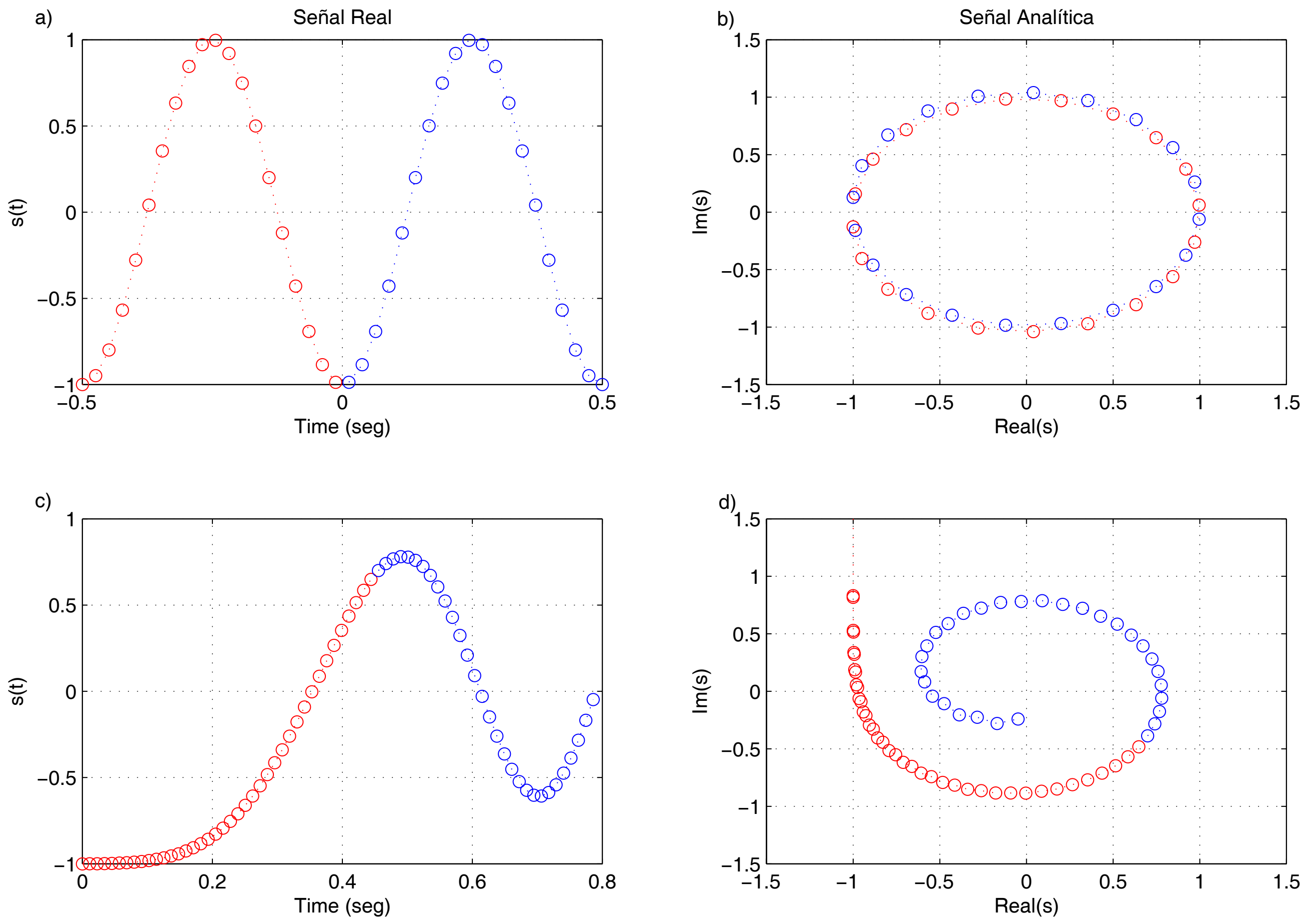
Señal analítica

H*: Transfomada de Hilbert de *s(t)

Amplitud instantánea ⟶ $a_s(t) = |z_s(t)|$

Frecuencia instantánea ⟶ $\upsilon_s(t) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d}{dt}\left[\arg(z_s(t))\right]$

Representación de una s. analítica



Su transformada de Fourier

$$z_s(t) = s(t) + i\ H\{s(t)\} = s(t) + i\,\frac{1}{2\pi}\,vp\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s(u)}{t-u}du$$

$$Z_s(\omega) = S(\omega) + i\,(-i\ sign(\omega))\ S(\omega) = 2U(\omega)S(\omega)$$

$$U(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \geq 0 \\ 0 & si\ \omega < 0 \end{cases}$$

$$f(t) \in C \rightarrow F[f^*(t)] = F[f]^*(-\omega)$$

$$\boxed{s(t) \in \Re \rightarrow F[s^*(t)] = F[s(t)] = F[s]^*(-\omega)} \rightarrow \boxed{S(-\omega) = S^*(\omega)}$$

Señal Analítica

Definición: Un función $f_a \in L^2(R)$ se dice ***analítica*** si su transformada de Fourier es nula para frecuencias negativas:

$$\hat{f}_a(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad \omega < 0$$

Una función analítica es **compleja** pero esta integramente **caracterizada por su parte real:**

$$f = \mathrm{Real}[f_a]$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\hat{f}_a(\omega) + \hat{f}_a^*(-\omega)}{2} \quad \Rightarrow \quad \hat{f}_a(\omega) = \begin{cases} 2\hat{f}(\omega) & \text{si} \quad \omega \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \omega < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

La señal analítica $f_a(t)$ asociada a una señal real $f(t)$ es la transf. inv. de Fourier de la (1).

Parte Analítica Discreta

f[n] , con *n=1,..., N* una señal discreta real

$$\hat{f}_a(k) = \begin{cases} \hat{f}(k) & \text{si} \quad k = 0, N/2 \\ 2\hat{f}(k) & \text{si} \quad 0 < k < N/2 \\ 0 & N/2 < k < N \quad \text{y para } \boxed{k < 0} \end{cases}$$

$$\boxed{f_a(n) = F^{-1}[\hat{f}_a(k)]}$$

Parte Analítica: Ejemplo

$$\boxed{f(t) = a\cos(\omega_0 t + \phi)}$$

$$= \frac{a}{2}\left(\exp[i(\omega_0 t + \phi)] + \exp[-i(\omega_0 t + \phi)]\right)$$

$$\hat{f}(\omega) = \pi a\left[\exp(i\phi)\,\delta(\omega - \omega_0) + \exp(-i\phi)\,\delta(\omega + \omega_0)\right]$$

$$\hat{f}_a(\omega) = 2\pi a\ \exp(i\phi)\,\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\boxed{f_a(t) = a\ \exp\left[i(\omega_0 t + \phi)\right]}$$

Aplicaciones

- Comunicación de Señales ➔ Modulación en frecuencia

- Modelos de sonido Aditivo ➔ música
  ➘ voz hablada ➔ formantes

Transformada Ondita Continua

$$CWT^{\psi} : L^2(\Re) \rightarrow L^2(\Re^2)$$
$$f \rightarrow CWT^{\psi}(f) = Wf$$

$$\psi \in L^2(\Re) / \int_{\Re} \psi(t)\, dt = 0, \; \|\psi\| = 1$$ y centrada en $t=0$

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

$$W_{\psi} f(u,s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^{*}\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$$

ψ Ondita Analítica

¿ Para qué usamos una ondita analítica?

Analizar la evolución temporal de los tonos de frecuencia

¿Porqué?

Separa la información de la fase y

de la amplitud de la señal compleja.

Transformada Ondita Analítica

$$
\begin{aligned}
CWT^{\psi} : L^2(\Re) &\rightarrow L^2(\Re^2) \\
f &\rightarrow CWT^{\psi}(f) = W_{\psi} f
\end{aligned}
$$

$$\psi \in L^2(\Re) / \int_{\Re} \psi(t)\, dt = 0 \,, \ \|\psi\| = 1$$

y centrada en *t=0*

Analítica

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

Centrada en t=u

$$W_{\psi} f(u,s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^{*}\left(\frac{t-u}{s}\right) dt$$

Dispersión temporal del átomo ondita

Centrada en t=u

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t-u)^2\left|\psi^*{}_{u,s}(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}(t-u)^2\left|\frac{1}{\sqrt{|s|}}\psi^*\boxed{\left(\frac{t-u}{s}\right)}\right|^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(sv)^2\frac{1}{|s|}\left|\psi(v)\right|^2 s\ dv$$

$$= s^2\sigma_t^2$$

Localización frecuencial del átomo ondita

$$\psi \text{ analítica} \Rightarrow \quad \hat{\psi}(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad \omega < 0$$

¿ Frecuencia central de $\hat{\psi}$?

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \omega \left| \hat{\psi}(\omega) \right|^2 d\omega$$

¿ Frecuencia central $\omega_{u,s}$ de $\psi_{u,s}$?

$$\hat{\psi}_{u,s}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re} \psi_{u,s}(t) \exp[-i\omega t] dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re} \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \exp[-i\omega t] dt =$$

$$v = \frac{t-u}{s}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{\Re} \psi(v) \exp[-i\omega(sv+u)] s\, dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sqrt{s} \exp[-i\omega u] \int_{\Re} \psi(v) \exp[-i(\omega s) v] dv$$

$$\hat{\psi}_{u,s}(\omega) = \sqrt{s} \exp[-i\omega u] \hat{\psi}(s\omega)$$

η

$\omega_{u,s} = \eta / s$

Dispersión frecuencial del átomo ondita

¿ Dispersión en Frecuencia de $\psi_{u,s}$?

$$\sigma^2_{\hat{\psi}_{u,s}} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Re}(\omega-\omega_{u,s})^2\left|\hat{\psi}_{u,s}(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\Re}\left(\omega-\frac{\eta}{s}\right)^2\left|\sqrt{s}\exp[-i\,\omega\,u]\,\hat{\psi}(s\omega)\right|^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}s\int_0^{+\infty}\left(\omega-\frac{\eta}{s}\right)^2\left|\hat{\psi}(s\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{v-\eta}{s}\right)^2\left|\hat{\psi}(v)\right|^2 dv$$

$v = s\,\omega$

$$\boxed{\sigma^2_{\hat{\psi}_{u,s}} = \frac{\sigma^2_{\omega}}{s^2}}$$

Resolución tiempo-frecuencia del átomo ondita

$\psi_{u,s}$ centrada en u

$$\sigma^2_{\psi_{u,s}} = s^2 \, \sigma^2_{\psi}$$

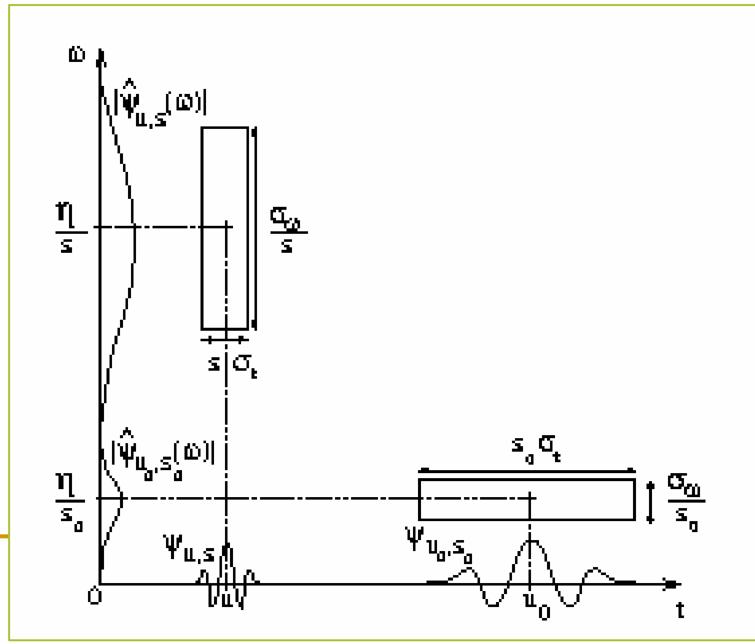
Dispersión temporal

Frecuencia central $\omega_{u,s}$ de $\psi_{u,s}$

$\omega_{u,s} = \eta/s$

Dispersión en Frecuencia de $\psi_{u,s}$

$$\sigma^2_{\hat{\psi}_{u,s}} = \frac{\sigma^2_{\omega}}{s^2}$$



¿Area?

Escalograma

$$P_W f(u,\xi) = \left|W_\psi f(u,s)\right|^2 = \left|W_\psi f\left(u, \frac{\eta}{\xi}\right)\right|^2$$

Escalograma

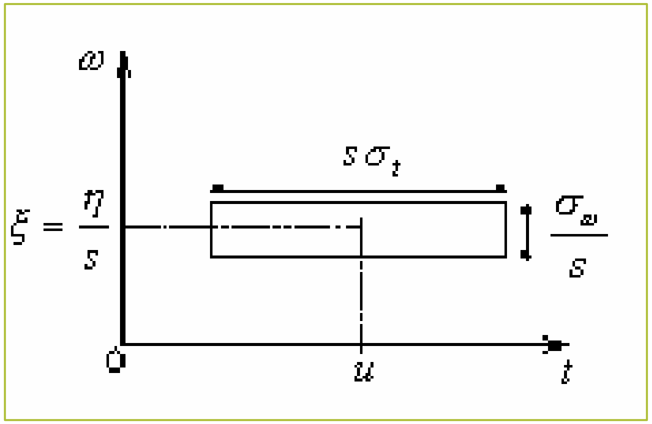
$P_W f$ densidad de energía local

en la caja de Heisemberg de cada ondita $\psi_{u,s}$

centrada en $(u,\xi)=(u,\eta/s)$

Frecuencia central

$\omega_{u,s}$ de $\psi_{u,,s}$



$$\eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \omega \left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2 d\omega$$

Frecuencia central de $\hat{\psi}$

Completitud de la Ondita Analítica

Teorema: Sea $f \in L^2(\Re)$,

$$W_\psi f(u,s) = \frac{1}{2} W_\psi f_a(u,s).$$

Si $C_\psi = \int_0^{+\infty} \omega^{-1} \left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2 d\omega < +\infty$ y f es real, entonces

$$f(t) = \frac{2}{C_\psi} \mathrm{Re}\left[\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_\psi f(u,s)\ \psi_s(t-u)\ du\ \frac{ds}{s^2} \right],$$

Inversibilidad

$$\| f(t) \|^2 = \frac{2}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| W_\psi f(u,s) \right|^2 du \frac{ds}{s^2}.$$

Conserv. Energía

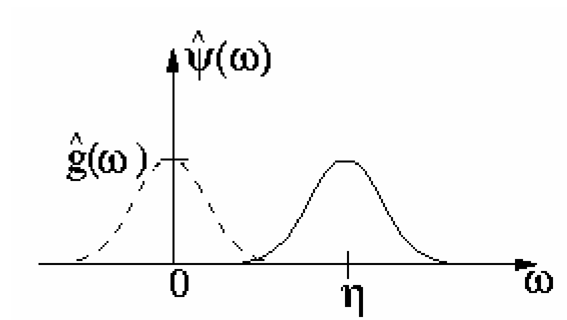
$\xi = 1/s \Rightarrow$

$$\| f(t) \|^2 = \frac{2}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_W f(u,\xi)\, du\, d\xi .$$

Ventanas Ondita Modulada

Una ondita analítica puede construirse con una modulación en frecuencia de una **ventana real** y **simétrica** *g*

$\boxed{\psi(t) = g(t)\exp(i\eta t)}$ ➔ $\boxed{\hat{\psi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \eta)}$



Si $\hat{g}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \eta \quad \Rightarrow \quad \hat{\psi}(\omega) = 0 \quad si \quad \omega < 0$ $\therefore$ ψ es analítica

g real y par $\Rightarrow$ $\hat{g}$ real y simétrica $\Rightarrow$ $\hat{\psi}$ tiene frec. central η y

$$|\hat{\psi}(\eta)| = \sup_{\omega \in \Re} |\hat{\psi}(\omega)| = \hat{g}(0)$$

Las Onditas de Gabor

$$\psi(t) = g(t)\exp[i\eta t] \qquad \text{con} \qquad g(t) = \frac{1}{(\sigma^2\pi)^{1/4}}\exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right)$$

¿ Son analíticas?

$$\hat{\psi}(\omega) = \hat{g}(\omega - \eta) \qquad \hat{g}(\omega) = (4\sigma^2\pi)^{1/4}\exp\left(\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}\right)$$

Si $\sigma^2\omega^2 >> 1$ entonces $\hat{g}(\omega) \approx 0$ → y $\hat{\psi}(\omega) \approx 0$ para $|\omega| > \eta$

Si $|\omega| > \eta$, $\dfrac{\sigma^2\omega^2}{2} > \dfrac{\sigma^2\eta^2}{2} >> \dfrac{1}{2}$

ψ se dice *aproximadamente* analítica

Ejemplo 1: Onda Sinusoidal – Ondita Gaussiana

$$f(t) = a\ \exp(i\,\omega_0\,t)$$

$$W_\psi f(u,s) = a\sqrt{s}\,\hat{\psi}^*(s\omega_0)\exp(i\omega_0 u) = a\sqrt{s}\,\hat{g}(s\omega_0 - \eta)\exp(i\omega_0 u)$$

$$\frac{\xi}{\eta} P_W f(u,\xi) = \frac{1}{s}\left|W_\psi f(u,s)\right|^2 = a^2\left|\hat{g}\left(\eta\left(\frac{\omega_0}{\xi} - 1\right)\right)\right|^2$$

Escalograma Normalizado

¿Dónde es máximo?

$$\omega_0 = \xi$$

Ejemplo 2: Chirp Lineal - *Ondita Gaussiana*

$$f(t) = \exp(\boxed{i\,a\,t^2})$$

$$\boxed{\frac{1}{s}\left|Wf(u,s)\right|^2 = \left(\frac{4\pi\sigma^2}{1+4s^2a^2\sigma^4}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-\sigma^2}{1+4s^2a^4\sigma^4}(\eta - 2\,a\,s\,u)^2\right)}$$

Sea u fijo

Si $4\,a^2\,s^4\,\sigma^4 << 1$ ⇨ $\dfrac{\xi}{\eta} P_W\, f(u,\xi)$ es función Gaussiana de s

¿Dónde es máximo? $\boxed{\eta / s = 2\,a\,u}$

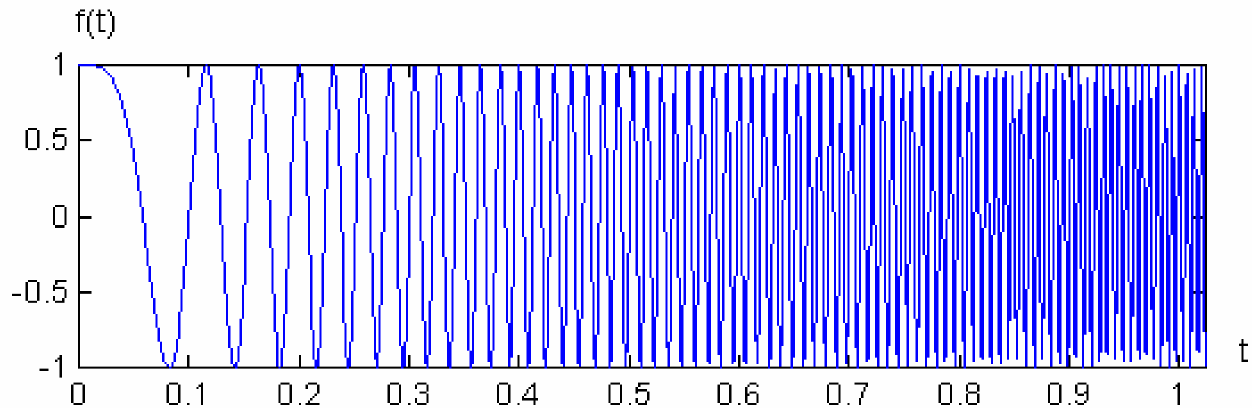
$\boxed{\phi(u) = a\,u^2}$ $\boxed{\xi(u) = \eta / s = 2\,a\,u = \phi'(u)}$

Frecuencia Instantánea

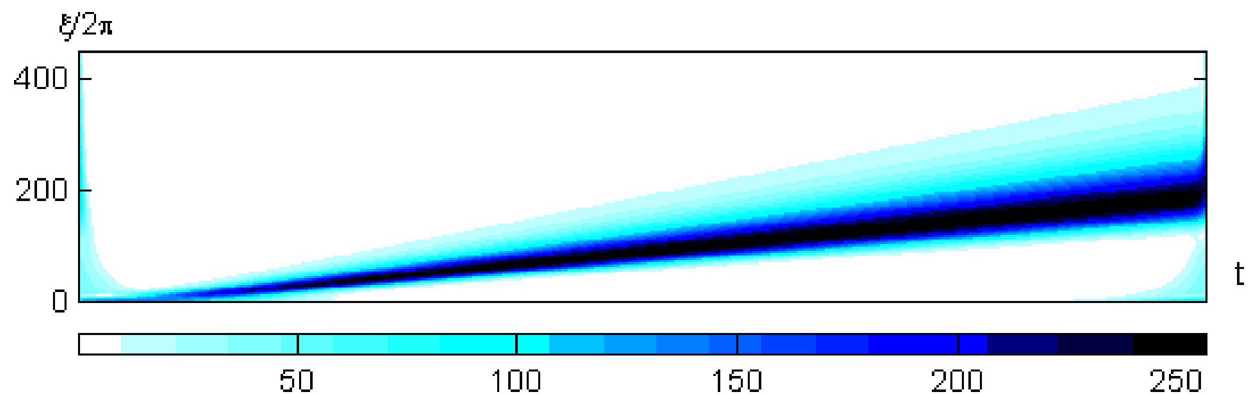
Chirp Lineal: Escalograma Normalizado (c/Ondita: de Gabor)

$$f(t) = \exp(i\,\omega_0\, t^2)$$

a)



b)



Onditas Discretas

(Daubechies, 1992)

$f(t)$ ⇨ muestreada uniformemente en intervalos N^{-1} en $[0,1]$

Wf(u,s) sólo puede calcularse para escalas $N^{-1} < s < 1$

- normalizar la distancia de muestreo a 1
- considerar la señal dilatada $f(t) = f(t/N)$
- $Wf(u,s) = N^{-1/2}\, Wf(Nu, Ns)$ (por cambio de variables)

Onditas Discretas: Escalas y Octavas

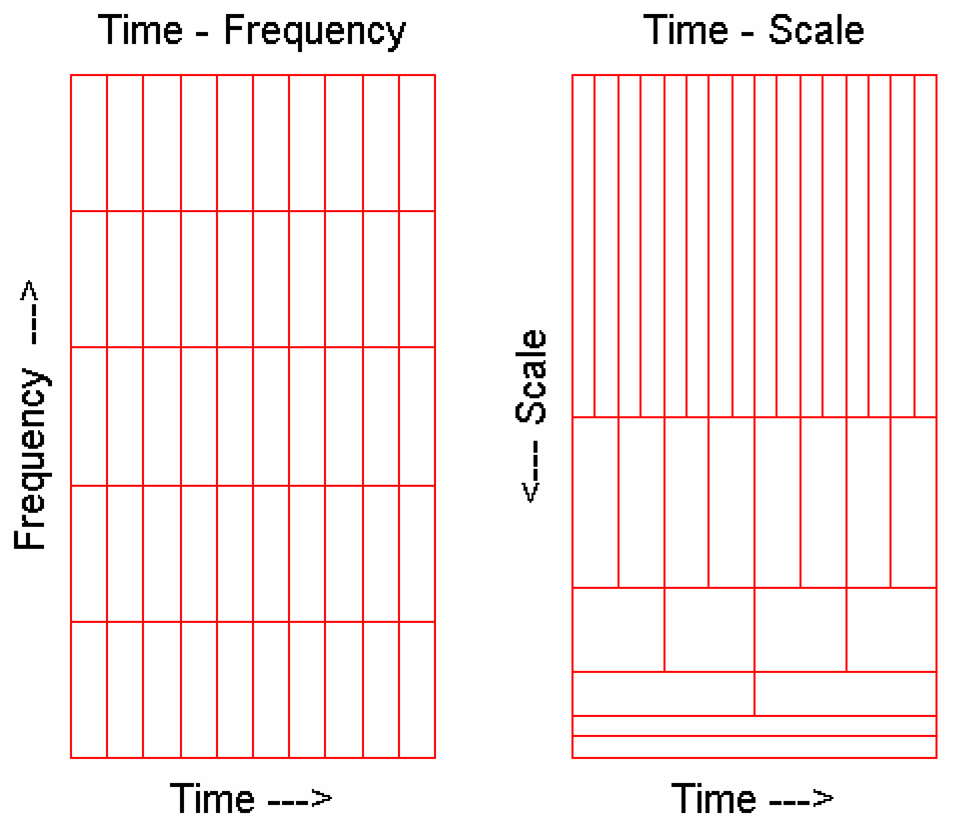
$\{f[n]\}$ la señal discreta de tamaño N

DWT f(u,s) se calcula a escalas $\boxed{s=a^{j}}$ con $\boxed{a=2^{1/\nu}}$

- ν escalas intermedias en cada **octava** $[\,2^{j}, 2^{j+1})$.

ν : número de **voces** o **sub-octavas**

Recubrimiento Tiempo-Frecuencia y Tiempo-Escala

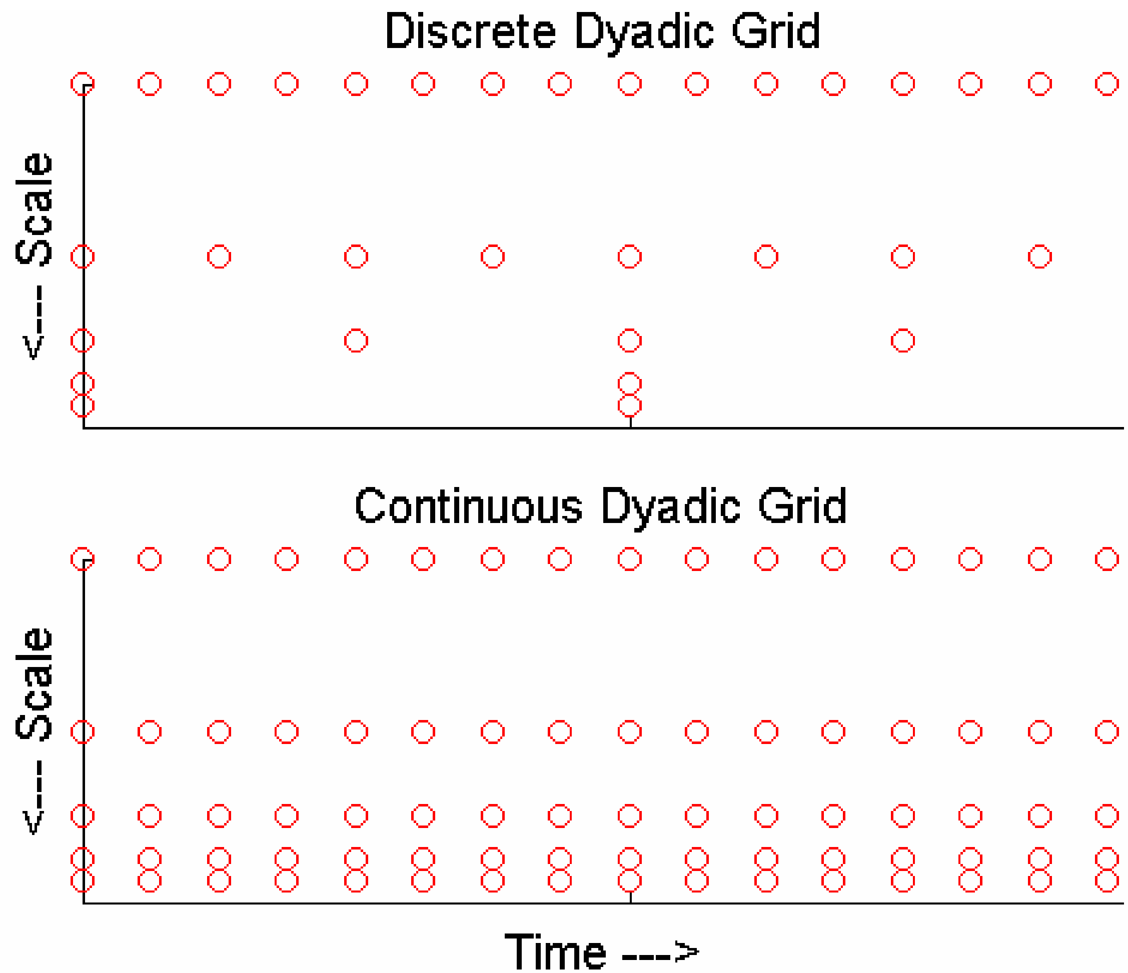


Particiones del Plano Tiempo-Escala

$s=a^j$

$u= n.a^j$

$a=2$



$s=a^j$

$u= n.$

$a=2$

La Ondita Discreta escalada

$\psi(t)$ ondita con soporte en $[-K/2, K/2]$

Para $2 \leq a^j \leq N\,K^{-1}$

$$\psi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{a^j}}\,\psi\left(\frac{n}{a^j}\right)$$

Ondita Discreta escalada por a^j.

Tiene $K\,a^j$ valores no nulos en $[-N/2\,,\,N/2]$

$$\Downarrow$$

escala $a^j > 2$

De otro modo el intervalo de muestreo podría ser mas grande que el

supp de ψ

EEG - Descomposición Diádica