



Transformada Ondita. Teoría y Aplicaciones

(Clase 3)

Dra. María Eugenia Torres

Universidad Nacional de Entre Ríos
Facultad de Ingeniería
Laboratorio de Señales y
Dinámicas no Lineales

metorres@ceride.gov.ar

Contenidos

- **Introducción**
Elementos de Matemáticas avanzadas. Operadores lineales. Proyecciones. Espacios vectoriales. Filtros lineales invariantes en el tiempo. Integrales de Fourier en L^1 y en L^2 . Propiedades. Filtros lineales discretos invariantes en el tiempo. Señales finitas.
- **Análisis tiempo-frecuencia**
La transformada Fourier por ventanas. La transformada ondita. Frecuencia instantánea. Energía tiempo-frecuencia instantánea.
- **Marcos**
Teoría de Marcos. Marcos en Fourier y en onditas. Invariancia ante traslación. Transformada Ondita Diádica.
- **Bases Ondita.**
Bases onditas ortogonales. Aproximaciones Multirresolución. Funciones escala. Filtros espejo conjugados. Clases de bases ondita. Onditas y bancos de filtros. Bases biortogonales.
- **Aplicaciones.**

Análisis tiempo-frecuencia

Átomos Tiempo Frecuencia

Transformación Lineal Tiempo-Frecuencia



correlaciona la señal con una *familia de formas de onda*
bien concentradas en tiempo y en frecuencia



Átomos Tiempo-Frecuencia

Análisis tiempo-frecuencia

Átomos Tiempo Frecuencia

$$\{ \phi_\gamma \}_{\gamma \in \Gamma}$$

$$\phi_\gamma \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \|\phi_\gamma\| = 1$$

familia general de átomos tiempo-frecuencia
 γ puede ser un parámetro multi-índice

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \rightarrow \quad Tf(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi_\gamma^*(t) dt = \langle f, \phi_\gamma \rangle.$$

Análisis tiempo-frecuencia

Atomos Tiempo Frecuencia

Por Parseval:

$$Tf(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi_{\gamma}^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \hat{\phi}_{\gamma}^*(\omega) d\omega$$

💧 Si $\phi_{\gamma}(t) \cong 0$ para t fuera de un entorno de cierto u



$\langle f, \phi_{\gamma} \rangle$ depende de los valores de f en dicho entorno

💧 Si $\hat{\phi}_{\gamma}(\omega) \cong 0$ para ω fuera de un entorno de cierto ξ



$\langle f, \phi_{\gamma} \rangle$ depende de los valores de \hat{f} en dicho entorno

Transformada de Fourier por ventanas (WFT)

Gabor (1946)

➤ ventana simétrica real g : $g(t) = g(-t)$

$$g_{u, \xi}(t) = e^{i\xi t} g(t - u)$$

➤ g normalizada: $\|g\| = \|g_{u, \xi}\| = 1 \quad \forall (u, \xi) \in \mathbb{R}^2$

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow Sf(u, \xi) = \langle f, g_{u, \xi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t - u) e^{-i\xi t} dt$$

Transformada de Fourier por Ventanas

$$P_S f(u, \xi) = \left| \langle f, g_{u, \xi} \rangle \right|^2 = |Sf(u, \xi)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t-u) e^{-i\xi t} dt \right|^2$$

Mide la **densidad de energía de f** en el entorno tiempo-frecuencia de (u, ξ) especificado por la caja de Heisenberg de $g_{u, \xi}$

Átomos de Fourier por ventanas

$$\hat{f}(u, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t-u) e^{-i\xi t} dt$$

g ventana

Operadores:

- ✓ **Modulación en frecuencia** (*modulación temporal*)

$$g(t) \rightarrow g_{\xi}(t) = g(t) \exp(i\xi t)$$

- ✓ **Traslación en tiempo**

$$g(t) \rightarrow g_u(t) = g(t-u)$$

$$\phi_{\gamma}(t) = g_{u, \xi}(t) = e^{i\xi t} g(t-u)$$

Átomos Ondita

ψ ondita madre

Operadores



Dilatación en escala s

$$\psi(t) \rightarrow \psi_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi(t/s)$$



Traslación en tiempo u

$$\psi(t) \rightarrow \psi_u(t) = \psi(t - u)$$

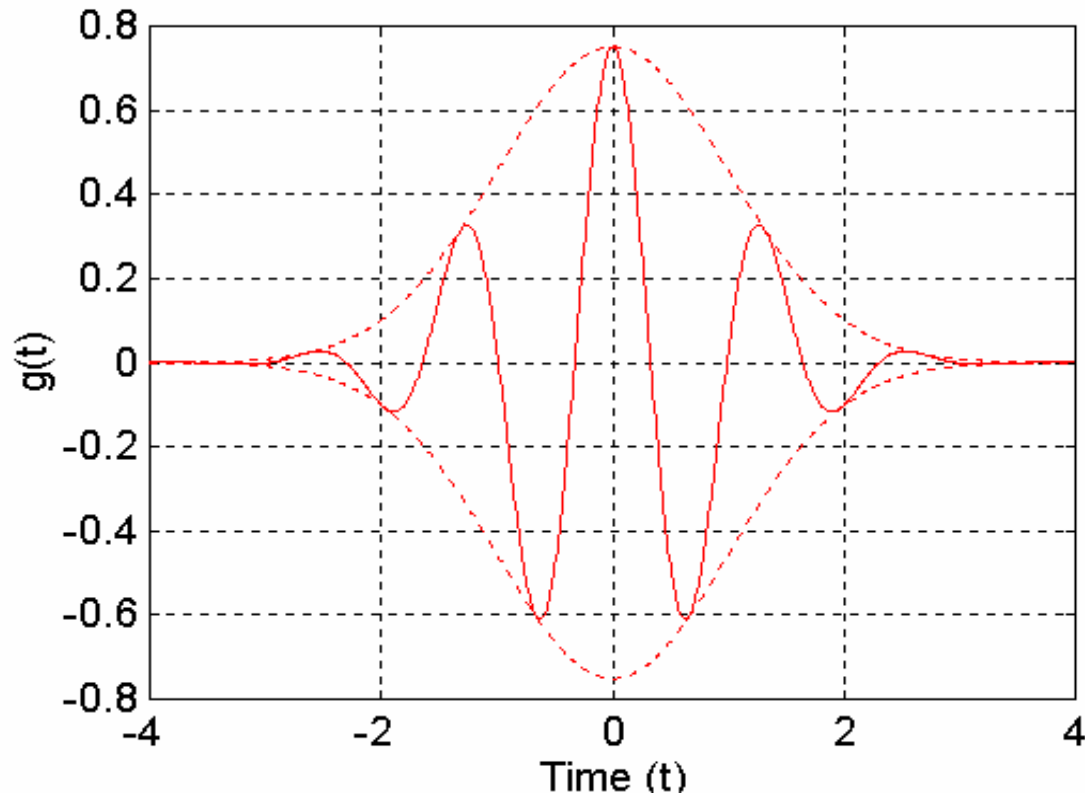
$$\phi_\gamma(t) = \psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t - u}{s}\right)$$

Atomo Ondita

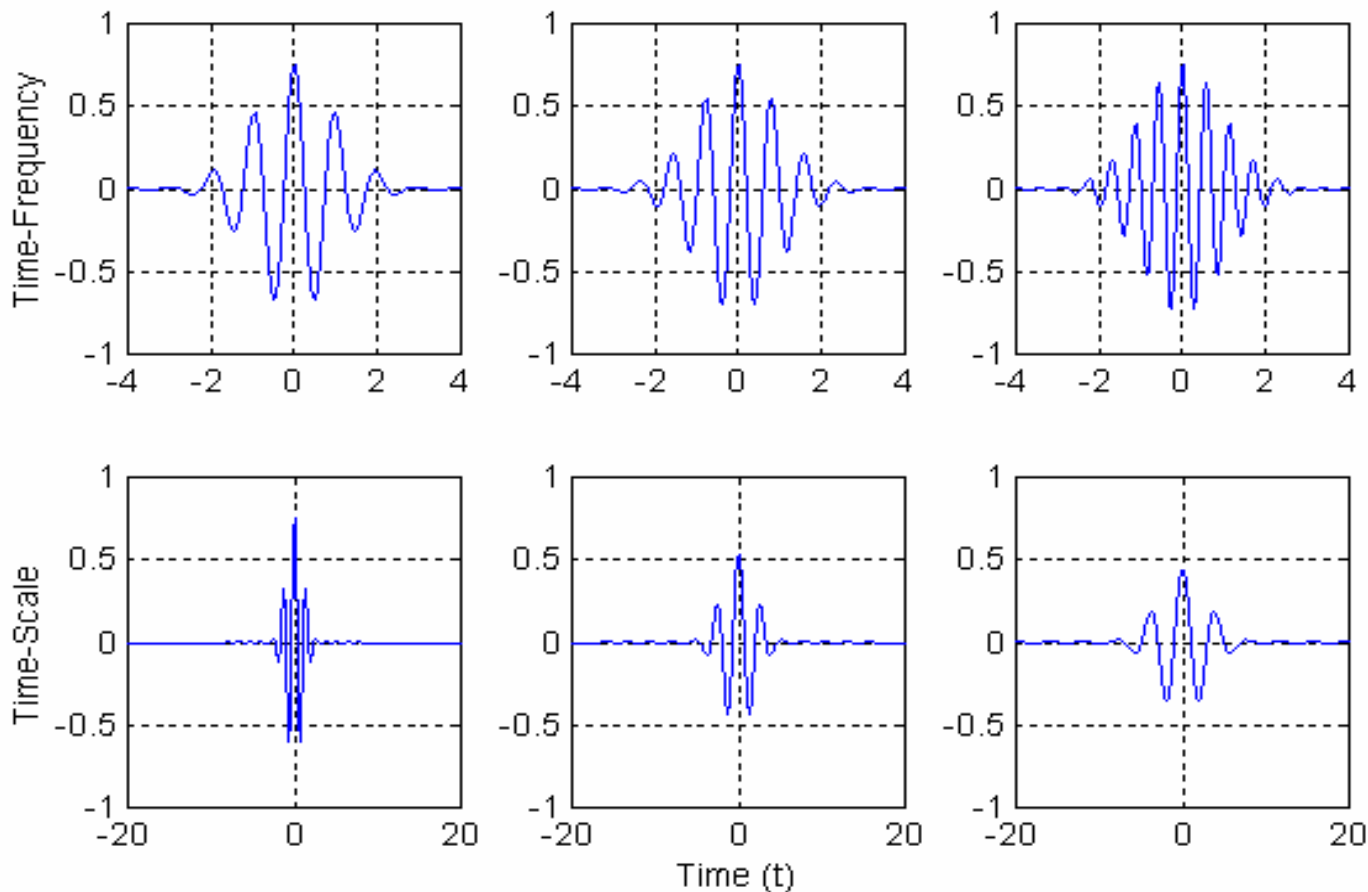
Gaussiana Modulada u Ondita de Morlet (1989)

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \exp\left(\frac{ivt}{2\pi} - \frac{t^2}{2\pi}\right)$$

Modulated Gaussian



Efecto comparado de los operadores Modulación en frecuencia y dilatación en escala



Traslación en frecuencia:

$$\xi = 2\pi\nu, \text{ con } \nu = \{0.25, 0.5, 1\}$$

Dilatación en escala:

$$a = \{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}\}$$

Cajas de Heisenberg

¿ La información provista por $\langle f, \phi_\gamma \rangle$?



región en el **plano tiempo-frecuencia** (t, ω)



su localización depende de la *dispersión* t-fr del átomo Φ_γ

Cajas de Heisenberg: Dispersión

$$\|\phi_\gamma\|^2 = \langle \phi_\gamma, \phi_\gamma \rangle = \int_R |\phi_\gamma(t)|^2 dt = 1 \quad |\phi_\gamma(t)|^2 \text{ distrib. de probab.}$$

En el eje temporal: $u_\gamma = \int_R t |\phi_\gamma(t)|^2 dt$ $\sigma_t^2(\gamma) = \int_R (t - u_\gamma)^2 |\phi_\gamma(t)|^2 dt$

En el eje frecuencial:

$$\int_R |\hat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \|\phi_\gamma\|^2$$

$$\xi_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_R \omega |\hat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega \quad \sigma_\omega^2(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_R (\omega - \xi_\gamma)^2 |\hat{\phi}_\gamma(\omega)|^2 d\omega$$

Cajas de Heisenberg: Resolución

Átomos en el plano Tiempo-Frecuencia

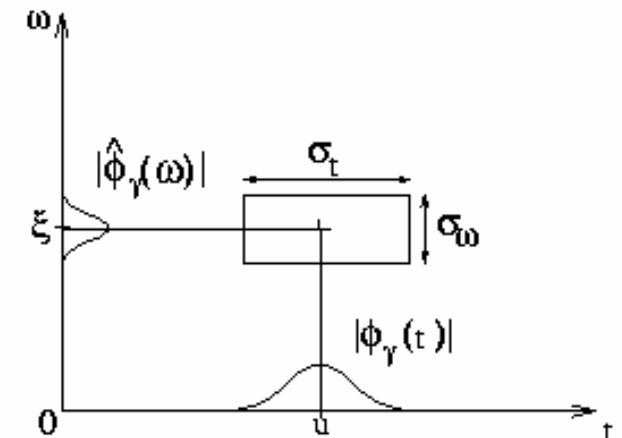
Cajas de Heisenberg:

(u_γ, ξ_γ) : centro

ancho temporal : $\sigma_t(\gamma)$

ancho frecuencia 1 : $\sigma_\omega(\gamma)$

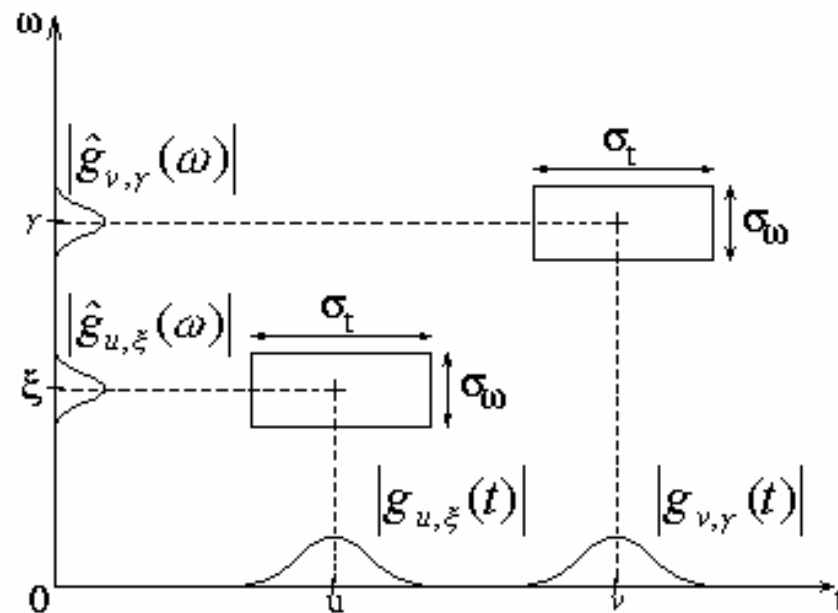
Area : $\sigma_t(\gamma) \sigma_\omega(\gamma) \geq \frac{1}{2}$



Sólo cajas de área superior a 1/2 corresponden a átomos

Resolución tiempo-frecuencia de la WFT

$g_{u,\xi}$ corresponde a una caja de Heisenberg de área $\sigma_t \sigma_\omega$ centrada en (u, ξ)



El tamaño de la caja es independiente de (u, ξ)

WFT tiene igual resolución en todo el plano tiempo-frecuencia

Complejidad y Estabilidad

¿Puede recuperarse $f(t)$ a partir de $Sf(u, \xi)$?



Teorema:

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Sf(u, \xi) g(t-u) e^{i\xi t} d\xi du \quad (1)$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Sf(u, \xi)|^2 d\xi du$$

Energía  Espectrograma 

La (1) puede reescribirse como
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, g_{u,\xi} \rangle g_{u,\xi} d\xi du$$

Completitud y Estabilidad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Sf(u, \xi)|^2 d\xi du$$

$$f \in L^2(\mathfrak{R}) \rightarrow Sf(u, \xi) \in L^2(\mathfrak{R}^2)$$

¿Es esta relación biunívoca?

Dada $\phi \in L^2(\mathfrak{R}^2)$, $\exists f \in L^2(\mathfrak{R}) / Sf = \phi$?

En general NO porque Sf es redundante.

Núcleo Reproductor

Núcleo reproductor

$$f(t) \in L^2(\mathbb{R}) \xrightarrow{WFT} Sf(u, \xi) \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

¿Cualquier $\Phi(u, \xi) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ es imagen por la WFT de cierta $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$?

Proposición: Sea $\Phi(u, \xi) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Entonces existe $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\Phi(u, \xi) = Sf(u, \xi)$ si y sólo si

$$\Phi(u_0, \xi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u, \xi) K(u_0, u, \xi_0, \xi) du d\xi \quad ,$$

con

$$K(u_0, u, \xi_0, \xi) = \langle g_{u, \xi}, g_{u_0, \xi_0} \rangle$$

**Núcleo
Reproductor**

Núcleo Reprodutor

$$K(u_0, u, \xi_0, \xi) = \langle g_{u, \xi}, g_{u_0, \xi_0} \rangle \quad (\text{Aronszajn, 1950}).$$

¿ Qué información da el núcleo reproductor?

$$K(u_0, u, \xi_0, \xi)$$

mide la **superposición tiempo-frecuencia** de los dos
átomos $g_{u, \xi}$ y g_{u_0, ξ_0}

- La amplitud de $K(u_0, u, \xi_0, \xi)$ decae con $u_0 - u$ y $\xi_0 - \xi$
- La tasa de decaimiento depende de la concentración de energía de g y \hat{g}

Función de ambigüedad

► La amplitud de $K(u_0, u, \xi_0, \xi)$ decae con $u_0 - u$ y $\xi_0 - \xi$

$$K(u_0, u, \xi_0, \xi) = \langle g_{u, \xi}, g_{u_0, \xi_0} \rangle = \exp\left(-\frac{i}{2}(\xi - \xi_0)(u + u_0)\right) Ag(u_0 - u, \xi_0 - \xi)$$

con

$$Ag(\tau, \gamma) = \int_{\mathbb{R}} g\left(v + \frac{\tau}{2}\right) g\left(v - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\gamma v} dv$$

Función de Ambigüedad de g

Por Parseval

$$Ag(\tau, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}\left(\omega + \frac{\gamma}{2}\right) \hat{g}\left(\omega - \frac{\gamma}{2}\right) e^{i\tau\omega} d\omega$$

- La tasa de decaimiento depende de:
- ☆ la dispersión temporal de g
 - ☆ la dispersión en frecuencia de \hat{g}

¿Cómo elegir la ventana g ?

- Resolución tiempo-frecuencia de la WFT depende de la dispersión de la ventana g en tiempo y en frecuencia.

¿ Cómo se mide?

- A partir del decaimiento de la función de ambigüedad.
- A partir del área de la caja de Heisenberg.

Teorema de Incertidumbre \rightarrow **Area mínima** $=1/2 \Leftrightarrow g$ es **Gaussiana**



$Ag(\tau, \gamma)$ es en este caso un **Gaussiana bidimensional**

¿Cómo modificar la localización tiempo-frecuencia de g ?

🔥 ¿Mediante un cambio de escala (*scaling*)?

σ_t^g , σ_ω^g : dispersión tiempo y frecuencia de g (Heisenberg)

$$g_s(t) = s^{-1/2} g(t/s) \quad \text{dilatación de } g$$



$$\sigma_t^{g_s} = s \sigma_t^g \quad \text{y} \quad \sigma_\omega^{g_s} = \sigma_\omega^g / s$$

- ✓ El área de la caja de Heisenberg no se modifica
- ✓ La caja es dilatada en tiempo y contraída en frecuencia

$$Ag_s(\tau, \gamma) = Ag(\tau/s, s\gamma)$$

- ✓ La función de ambigüedad es contraída en tiempo por $1/s$ y dilatada en frecuencia por s ($s > 1$).



Transformada Ondita

La **transformada ondita** descompone una señal

aplicando simultáneamente

→ operador dilatación

→ operador traslación

sobre un motivo base

: la ondita madre

ψ ondita madre

Operadores



Dilatación en escala s

$$\psi(t) \rightarrow \psi_s(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi(t/s)$$



Traslación en tiempo u

$$\psi(t) \rightarrow \psi_u(t) = \psi(t - u)$$

$$\phi_\gamma(t) = \psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t - u}{s}\right)$$

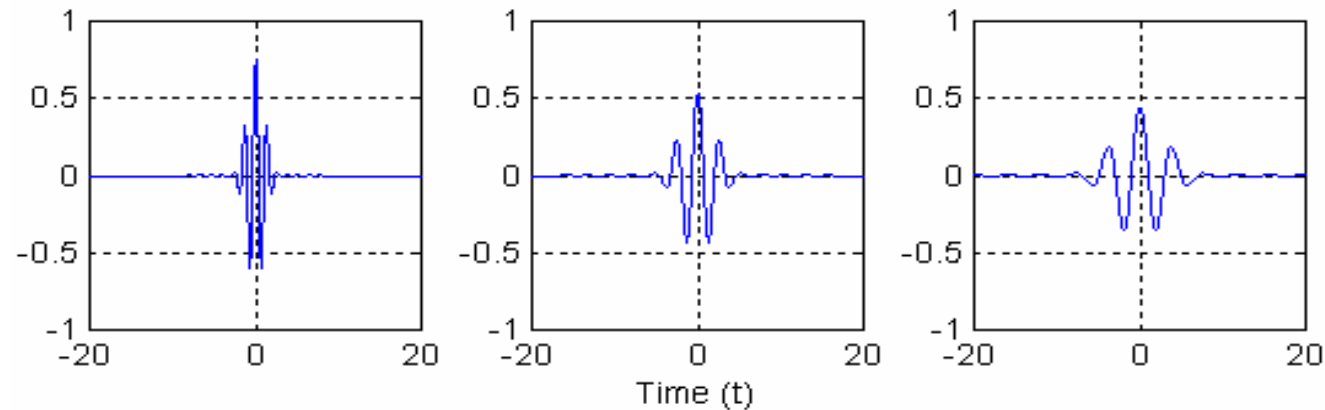
Átomo Ondita

¿Cuál es el efecto de este operador conjunto?

Aplica sobre el gráfico de $\{t, \psi(t)\}$ una

homotecia de parámetro:

→ s sobre el eje temporal



$$\psi_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi(t/s), \quad \text{con } s = \{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}\}$$

→ $1/\sqrt{|s|}$ sobre el eje de las amplitudes

Los átomos

$$\psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

definen el nuevo espacio de representación

El plano tiempo - escala

Transformada Ondita Continua

$$f = f(t)$$

$$\begin{aligned} CWT^\psi : L^2(\mathfrak{R}) &\rightarrow L^2(\mathfrak{R}^2) \\ f &\rightarrow CWT^\psi(f) = Wf \end{aligned}$$

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt$$

¿ Qué ψ puede ser una “ondita”?

Una **ondita** es una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$$

- tiene valor medio nulo.
- debe ser oscilatoria.
- es normalizada: $\|\psi\| = 1$
- está centrada en un entorno de $t=0$.

$$\psi_{s,u}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

$$\|\psi_{u,s}\| = 1$$

La CWT como un filtro lineal

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt = f * \bar{\psi}_s(u) \quad (1)$$

donde

$$\bar{\psi}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^* \left(\frac{-t}{s} \right)$$

$$\hat{\bar{\psi}}_s(\omega) = \sqrt{|s|} \hat{\psi}^*(s\omega)$$

$\hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\psi}$ es la función de transferencia
de un filtro pasabanda

(1) convoluciona la f con filtros pasa banda dilatados

¿ Onditas complejas u onditas reales ?

- 🔥 medir la evolución temporal de transitorios en frecuencia

Onditas complejas analíticas

- 🔥 detección de transitorios abruptos

Onditas reales

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad \Rightarrow \quad Wf(u, s) \text{ mide la variaci3n de } f \text{ en un entorno de } u$$

- cuando $s \rightarrow 0$, el decaimiento de los coeftes. ondita caracteriza la *regularidad* de f

Aplicaciones:

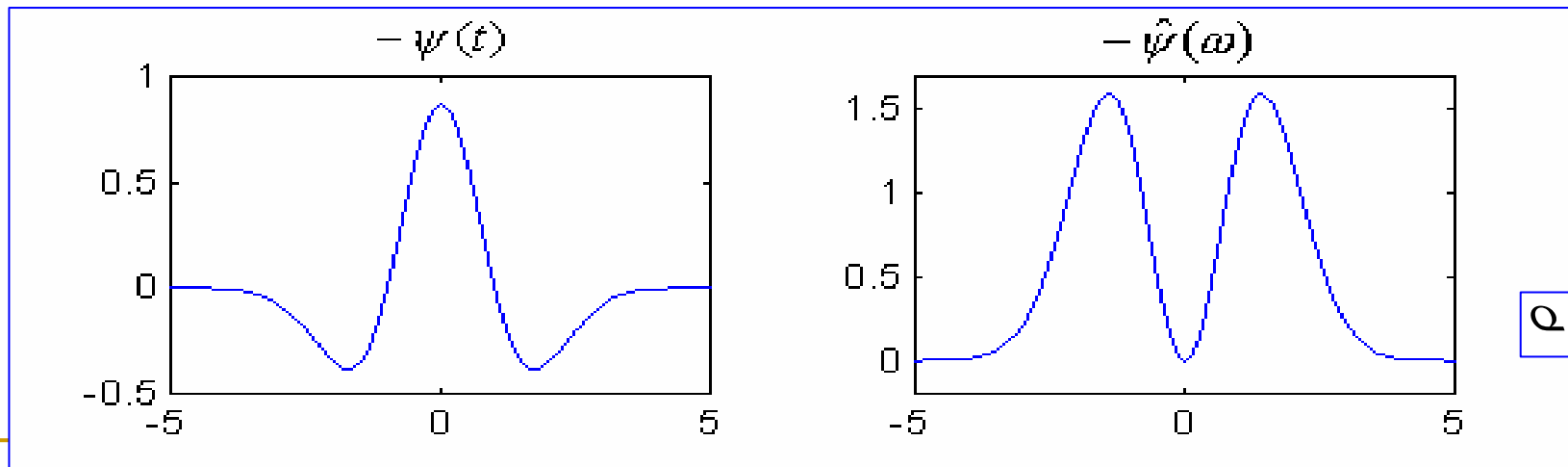
- Detecci3n de transitorios
- An3lisis fractal

Ondita Real: Sombrero Mejicano

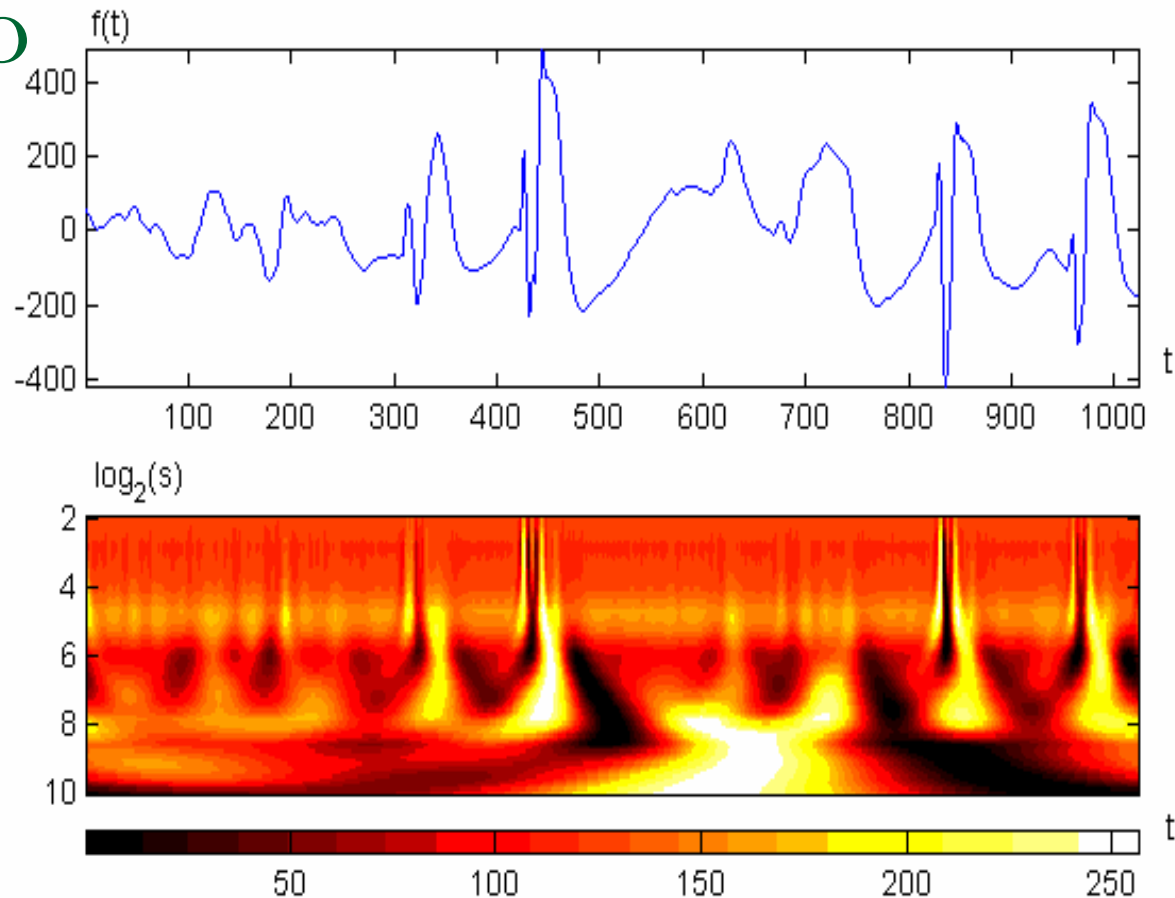
$$\psi(t) = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3} \sigma} \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2} \right)$$

Sombrero Mejicano Normalizada

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{-\sqrt{8} \sigma^{5/2} \pi^{1/4}}{\sqrt{3}} \omega^2 \exp\left(-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2} \right)$$



Ejemplo



$Wf(u,s)$ calculada con el Sombrero Mexicano

length(f) = $N = 2^J$
 $J = \text{nvoices} = 10;$

WaveLab

```
x = ReadSignal('mysignal');
nvoice = 10;
N=2^novice;
t=1:N;
wavelet = 'Sombrero';
rwt = RWT(x,nvoice,wavelet,1,4);

figure(1);
subplot(211)
plot(t,x);
axis([1 length(x) min(x) max(x)])
rwt = fliplr(rwt);
subplot(212)
ImageRWT(rwt, 'Individual', 'colormap', 'log');
```

¿ WT real es completa y preserva la energía ?

Teorema: (Calderón, 1964; Grossman-Morlet, 1984)

$\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ función real

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty$$

Condición de Admisibilidad

$\forall f(t) \in L^2(\mathbb{R})$

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2}$$

Completitud

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Wf(u, s)|^2 du \frac{ds}{s^2}$$

Preserv. de la Energía

¿ Cuándo se cumple la condición de admisibilidad ?

$$C_{\psi} = \int_{\mathfrak{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty \quad (1)$$

$$\hat{\psi}(0) = 0 \quad (\Leftrightarrow \psi \text{ tiene media nula}) \quad (2)$$

Si vale (2) y $\hat{\psi}(\omega)$ es diferenciable con continuidad



vale la condición de admisibilidad (1).

$\hat{\psi}(\omega)$ es diferenciable con continuidad

si ψ tiene suficiente decaimiento

¿ Es redundante la CWT?

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) du \frac{ds}{s^2} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$Wf(u_0, s_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) du \frac{ds}{s^2} \right) \frac{1}{\sqrt{s_0}} \psi^* \left(\frac{t-u_0}{s_0} \right) dt$$

$$Wf(u_0, s_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u, s) \psi_{u,s}(t) du \frac{ds}{s^2} \right) \psi_{u_0, s_0}^*(t) dt$$

$$Wf(u_0, s_0) = \frac{1}{C_{\psi}} \iint_{\mathbb{R}^2} K(u, u_0, s, s_0) Wf(u, s) du \frac{ds}{s^2}$$

$$K(u, u_0, s, s_0) = \left\langle \psi_{u,s}, \psi_{u_0, s_0} \right\rangle$$

Núcleo Reprodutor

¿ Inversión de la CWT ?

$Wf(u,s)$ conocida para $s < s_0$

¿ Es posible recuperar la $f(t)$?

Completar la información
correspondiente a $Wf(u,s)$ para $s > s_0$

¿Cómo?

Función “**Scaling**” ϕ

Función “Scaling” (escalamiento)

👉
$$|\hat{\phi}(\omega)|^2 = \int_1^{+\infty} |\hat{\psi}(s\omega)|^2 \frac{ds}{s^2} = \int_{\omega}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi$$

👉 La fase compleja de $\hat{\phi}(\omega)$ se elige arbitrariamente

Propiedades:

- $\|\phi\| = 1$
- $\lim_{\omega \rightarrow 0} |\hat{\phi}(\omega)|^2 = C_{\psi}$

Interpretación de la Función escalamiento

$$\phi_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \phi\left(\frac{t}{s}\right) \quad \text{y} \quad \bar{\phi}_s(t) = \phi_s^*(-t)$$

$$Lf(u, s) = \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{s}} \phi\left(\frac{t-u}{s}\right) \right\rangle = f * \bar{\phi}_s(u)$$

Aproximación en baja-frecuencia
de f en la escala s

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{s_0} Wf(., s) * \psi_s(t) \frac{ds}{s^2} + \frac{1}{C_\psi s_0} Lf(., s_0) * \phi_{s_0}(t)$$

Función escalamiento del Sombrero Mejicano

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3} \sigma} \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2} \right)$$

Sombrero Mejicano Normalizada

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{2\sigma^{3/2} \pi^{1/4}}{\sqrt{3}} \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2} \right)$$

